



ORKUSTOFNUN
Jarðhitadeild

**TEMDDD:
Forrit til þrívíðra líkanreikninga
fyrir TEM-viðnámsmælingar**

Knútur Árnason

OS-95015/JHD-10 B

Mars 1995



ORKUSTOFNUN
Grensásvegi 9, 108 Reykjavík

Verknr. 510400

**TEMDDD:
Forrit til þrívíðra líkanreikninga
fyrir TEM-viðnámsmælingar**

Knútur Árnason

OS-95015/JHD-10 B

Mars 1995

ÁGRIP

Gert hefur verið forrit til þrívíðra líkanreikninga fyrir TEM-viðnámsmælingar. Forritið leysir jöfnur Maxwells, sem lýsa rafsegulsviði fyrir leiðandi jörð með einangrandi lofti yfir. Notuð er aðferð endanlegra mismuna fyrir rúmbreytur til að breyta Maxwellsjöfnunum í vektordiffurjöfnur í tíma. Þær eru síðan leystar með því að reikna "analytiska" lausn fyrir nálgunarvektor, sem nálgar raunverulegan lausnarvektor, með svokallaðri Lanczos spectur þáttun.

Forritið er skrifað í Ansi C forritunarmálinu og gerir miklar kröfur til tölvuminnis og reiknihraða. Fyrir raunhæf reiknilíkon þarf um 30 til 60 Mb vinnsluminni og reiknitími er frá 0.5 til 3 klukkustundir á DEC-Alpha3000/600 vinnustöð.

Niðurstöður forritsins eru bornar saman við niðurstöður annarra forrita. Reiknaðir sýndarviðnámsferlar fyrir lárétt lagskipta jörð falla vel að ferlum reiknuðum með einvíðum forritum. Reiknuð svörun fyrir þrívíða viðnámsdreifingu er borin saman við niðurstöður erlendra þrívíðra forrita. Sá samanburður sýnir yfirleitt gott samræmi. Þar sem munur kemur fram eru færð rök fyrir því, að það forrit sem hér er lýst, reikni réttar, þó að erfit sé að skera úr svo óyggjandi sé.

Sem dæmi um notkun forritsins eru reiknuð áhrif sjávar á TEM-mælingar nærri ströndu. Niðurstöður þeirra reikninga eru í samræmi við reynslu af mælingum við slíkar aðstæður hérlendis.

EFNISYFIRLIT

ÁGRIP	2
1. INNGANGUR	4
2. STUTT LÝSING Á FORRITINU	6
3. DÆMI UM NIÐURSTÖÐUR	14
3.1 Samnaburður við önnur forrit	14
3.2 Áhrif sjávar á TEM-mælingar	19
4. FREKARI ÞRÓUN	21
5. HEIMILDIR	23
ENGLISH SUMMARY	24

MYNDIR

1. Þrívíð áhrif í TEM-mælingum frá Torfajökulssvæði	5
2. Hnitaneit í FD-aðferð. Öll rúmhnit eru "discretiseruð" neðanjarðar, en einungis láréttu hnitin ofanjarðar	9
3. Sýndarviðnámsferill fyrir lárétt lagskipta jörð	15
4. Sýndarviðnámsferill fyrir lárétt lagskipta jörð og stórt t	15
5. Samanburður á niðurstöðum TEMDDD	17
6. Samanburður á niðurstöðum TEMDDD og IE-forrits Newmans o.fl. (1986)	18
7. Samanburður á niðurstöðum TEMDDD og nýjasta IE-forrits CEMI-hópsins	17
8. Áhrif sjávar á TEM-mælingar í mismunandi fjarlægð frá sjó	20
9: Áhrif sjávar á TEM-mælingu á nesi og 300 m frá beinni strönd	20

1. INNGANGUR

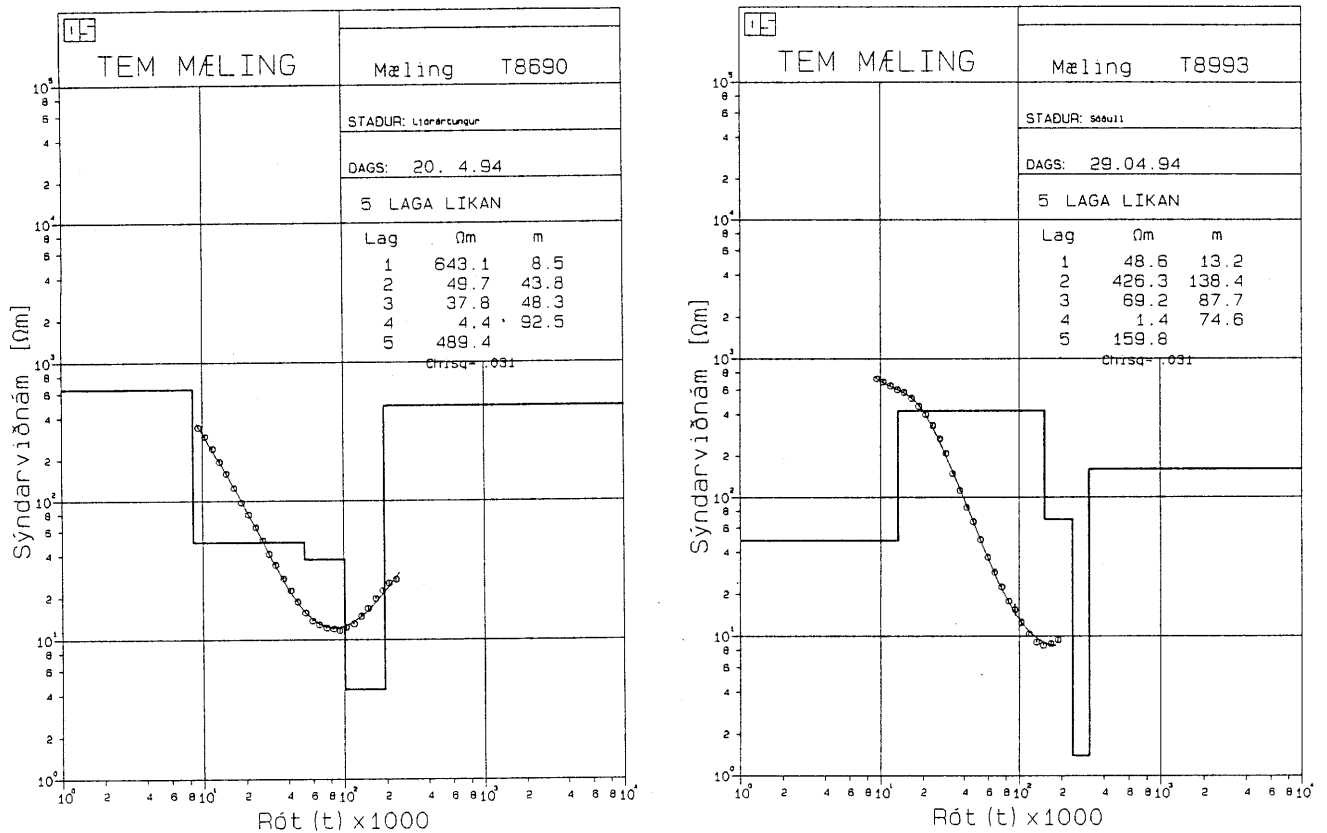
Eins og kunnugt er hafa svokallaðar TEM-viðnámsmælingar verið notaðar mikið við jarðhitarannsóknir á undanförunum árum. Þær hafa ýmsa kosti fram yfir Schlumbergermælingar, sem einkum voru notaðar hér áður fyrr, og hafa að mestu leyst þær af hólmi. Einn af kostum TEM-mælinga er sá að þær skygnast beinna ofan í jörðina undir mælistað en Schlumbergermælingar gera. Afleiðing þess er sú að hægt er að fá skýrari mynd af flókinni viðnámsdreifingu neðan jarðar með einvíðri túlkun TEM-mælinga en Schlumbergermælinga (í einvíðri túlkun er gert ráð fyrir að viðnám breytist einungis með dýpi, en ekki í láréttar stefnur). Ef viðnámsskipanin vîkur verulega frá láréttari lagskiptingu þarf við túlkun Schlumbergermælinga að beita tví- eða þrívíðri túlkun sem er mun umfangsmeiri og tímafrekari. Orkustofnun hefur um nokkurra ára skeið haft yfir að ráða hugbúnaði til tvívíðrar túlkunar Schlumbergermælinga og viðnáms-sniðsmælinga. Hann hefur verið notaður í allmiklum mæli en þó einkum til túlkunar á viðnáms-sniðsmælingum eftir að TEM-mælingar leystu Schlumbergermælingar af hólmi.

Þrátt fyrir það að TEM-mælingar skyggnist að verulegu leyti beint ofan í jörðina og einvíð túlkun sé í flestum tilfellum fullnægjandi sjást stundum mæliferlar sem bera þess greinilega merki að viðnámsskipanin undir mælistað er ekki lárétt lagskipt. Að slíkum ferlum er ekki hægt að fella, svo viðunandi sé, reiknaða ferla fyrir lárétt lagskipta jörð. Myndir 1a og 1b sýna dæmi um mæliferla sem ekki er hægt að nálga nógu vel með einvíðum líkönum. Auk þeirra tilvika þar sem augljóst er af mæliferlunum að viðnámsskipanin er ekki lárétt lagskipt, er við því að búast að stundum sé hægt að fella einvíða ferla að mæliferlum þrátt fyrir að viðnámsskipanin sé fjarri því að vera einvíð. Í slíkum tilfellum getur einvíð túlkun verið villandi.

Til þess að geta túlkað niðurstöður TEM-mælinga þar sem viðnámsdreifingin er ekki einvíð og ekki síður til að sjá hvernig ekki einvíð viðnámsskipan kemur fram í sýndarviðnámsferlum er nauðsynlegt að hafa í höndum verkfæri til að reikna sýndarviðnámsferla fyrir þrívíð líkön. Slíkir líkanreikningar eru ekki síst mikilvægir til þess að fá tilfinningu fyrir þrívíðum áhrifum og læra að þekkja þau í mæligögnum.

Með þessi vandamál í huga fór höfundur þessarar skýrslu að velta fyrir sér möguleikum á að koma upp á Orkustofnun hugbúnaði til þrívíðra líkanreikninga fyrir TEM-mælingar. Túlkun og líkanreikningar fyrir TEM-mælingar eru verulega flóknari bæði eðlisfræði- og stærðfræðilega en fyrir jafnstraumsmælingar (Schlumbergermælingar). Hugbúnaður til margvíðra líkanreikninga fyrir jafnstraumsaðferðir hefur verið til í nærri 20 ár og notaður við túlkun mæligagna í meira en 10 ár t.d. á Orkustofnun. Þróun á hugbúnaði til margvíðra líkanreikninga og túlkunar fyrir TEM-mælingar hófst fyrir um 10 árum og er mun skemmra á veg komin. Sú vinna er enn á rannsóknarstigi og einkum unnin af háskólum og ber þar hæst vinnu Gerald's W. Hohmanns og samstarfsmanna við Háskólann í Utah í Bandaríkjunum.

Höfundi þessarar skýrslu er kunnugt um fjögur erlend forrit til þrívíðra líkanreikninga fyrir TEM-mælingar. Þrjú þeirra (Newman, Hohmann og Anderson, 1986; Wang og Hohmann, 1993; Zonghou Xiong, pers. uppl. 1994) hafa verið gerð af mönnum sem tilheyra svokölluðum CEMI-hóp (Consortium for Electromagnetic Modeling and In-



Mynd 1. Þrívíð áhrif í TEM-mælingum frá Torfajökulssvæði. Mæld sýndarviðnámsgildi eru sýnd með hringjum; heildreginn ferill svarar til lagskipts líkans, sem sýnt eru bæði tölulega og sem súlurit.

version). Sá hópur samanstendur að mestu af fyrrverandi samstarfsmönnum og stúdentum Gerald's W. Hohmanns sem nú er látinn. Fjórða forritið var gert af Rússum við jarðeðlisfræðideild Olíuöðnaðarráðuneytis Rússlands (Druskin og Knizhnerman, 1988). Hohmann (1988) hefur ritað greinargott yfirlit yfir aðferðir við þrívíða líkanreikninga fyrir rafsegulaðferðir í jarðeðlisfræði.

Gerð var tilraun til að fá afnot af forritum CEMI hópsins. Þeirri málaleitan var svarað á þann veg að slíkt væri mögulegt, en þar sem forritin væru enn í þróun og ekki ætluð til almennrar dreifingar þyrfti Orkustofnun að gerast aðili að CEMI hópnum, annaðhvort sem styrktaraðili með fjárframlagi eða með vinnuframlagi og þá helst að senda mann erlendis til að taka þátt í vinnu við þróun forritanna. Orkustofnun taldi sér ekki kleift að leggja slíkt fram og var málið þar með látið niður falla.

Á miðju ári 1994 kom upp sú staða að nokkur verkefni sem jarðeðlisfræðideild Jarðhitadeildar hafði gert ráð fyrir að unnin yrðu féllu niður að ósk verkkaupa. Við það kom nokkur slaki í verkefnaáætlunina og var sá tími notaður til að þreifa á gerð þrívíðs reikniforrits fyrir TEM-mælingar. Skemmst er frá því að segja að gerð slíks forrits reyndist auðveldari en talið var í fyrstu og nú er svo komið að forritið hefur verið skrifað að mestu og reynt um nokkurt skeið.

2. STUTT LÝSING Á FORRITINU

Í forritum til þrívíðra líkanreikninga fyrir rafsegulaðferðir þarf að leysa jöfnur Maxwells fyrir leiðandi jörð með einangrandi lofti yfir. Leiðni jarðarinnar þarf að geta verið breytileg bæði í láréttar stefnur og lóðrétta. Jöfnur Maxwells er einungis hægt að leysa "analytískt" í einföldum sértilfellum og þær þarf því að leysa tölulega. Við tölulega lausn þess vandmáls sem hér um ræðir hafa einkum verið notaðar tvær tegundir aðferða, annarsvegar svokölluð heildajöfnuaðferð (e. integral equation method) sem hér verður kölluð IE-aðferð og hins vegar diffurjöfnuaðferðir, hér kallaðar DE-aðferðir (e. differential equation method). Hvor tegund aðferða hefur sína kosti og galla og hafa þær báðar verið notaðar við gerð þrívíðra TEM-forrita.

CEMI hópurinn hefur lagt áherslu á IE-aðferðina og eru tvö af áðurnefndum forritum þeirra af þeirri gerð. Þau eru þó þeim takmörkunum háð að með þeim er einungis hægt að reikna svörun frá til þess að gera litlum skrokkum í lárétt lagskiptri jörð. Í mjög einfölduðu máli má segja að IE-aðferðin byggir á því, að líta meigi svo á að viðnámskrokkarnir gefi truflun á svörun lárétt lagskiptrar jarðar. Til að reikna frávikið sem þeir valda þarf einungis að reikna tölulegar lausnir í skrokkunum. Áhrif skrokkanna lengra í burtu eru síðan reiknuð með Greens-föllum fyrir lárétt lagskippta jörð þar sem skrokkarnir eru uppsprettur. Með IE-aðferðinni verður umfang reikninganna og þörf á tölvuminni til þess að gera lítil ef viðnámskrokkarnir eru fáir og smáir. IE-aðferðin verður hins vegar óhentug þegar viðnámskrokkarnir verða margir og/eða stórir, sem rýrir notagildi hennar verulega. Með IE-aðferðinni er ennfremur erfitt að meðhöndla spanstrauma í viðnámskrokkunum svo viðunandi sé. Þegar viðnámi skrokkanna er mikið lægra en bakgrunnsviðnámið skipta spanstraumar verulegu máli. Að þessu verður vikið nánar síðar.

Með DE-aðferðum er vandamálið leyst tölulega frá grunni með því að leysa Maxwellsjöfnurnar tölulega í öllu rúminu og þar eru engin takmörk fyrir því hversu flókið viðnámslíkanið má vera. Helsti ókosturinn við DE-aðferðina er að reikningarnir verða umfangsmeiri og krefjast mikils tölvuminnis. Framfarir í tölvubúnaði sem orðið hafa á síðustu árum, bæði í reiknihraða og minnisstærð, hafa nú gert kleift að nota þessa aðferð með góðum árangri.

Tvær aðferðir eru algengastar við tölulega lausn diffurjafna með DE-aðferð. Annars vegar er aðferð endanlegra búta (e. finite element method), hér kölluð FE-aðferð, og hins vegar aðferð endanlegra mismuna (e. finite difference method), hér kölluð FD-aðferð. Með FE-aðferðinni fæst mikill sveigjanleiki í mögulegum líkönum, en framsetning og lausn Maxwellsjafnanna verður umfangsmikil og flókin. Tiltölulega einfalt er að setja Maxwellsjöfnurnar fram með FD-aðferð því að það liggur í eðli rafsegulsviðsins, sem er vektorsvið, að eðlilegt er að skilgreina rafsviðspættina á tengilínum netpunkta í rétthyrndu þrívíðu neti. Rétthyrnt þrívítt net býður jafnframt upp á verulegan sveigjanleika í líkanagerð, þó með þeim takmörkunum að öll viðnámskil eru skilgreind með lóðrétum eða láréttum bútum.

Í nýjasta forritinu frá CEMI hópunum (og því síðasta sem Gerald W. Hohmann lagði hönd á) er beitt FD-aðferð svo og í forriti Rússanna. Í FD-forriti CEMI hópsins er aðferð endanlegar mismuna notuð bæði á rúm- og tímabreytur, en í forriti Rússanna er

gerð mjög skilvirk nálgun á tímaþróun lausnarvektoranna og hún notuð til að gefa nálgun að "analytiskri" lausn í tíma. Með þessu móti verður lausn vandamálsins mun einfaldari og reikningarnir hraðvirkari. Þetta er ekki í fyrsta skipti sem snjallar nýjungar koma frá Rússum; minna má á að TEM-aðferðin var fyrst þróuð af rússneskum jarðeðlisfræðingum.

Þegar gera á forrit til þrívíðra TEM-reikninga þarf fyrst að taka afstöðu til þess hvaða aðferð henti best til tölulegra reikninga á þeim líkönum sem reikna þarf. Það var mat höfundar að notkun heildajafna með IE-aðferð setti mögulegum líkönum of þröngar skorður til að viðunandi gæti talist. Því var ákveðið að nota DE-aðferðir og að nota FD-aðferðina fyrir rúmhnit en aðferð Rússanna með "semi-analytiskri" lausn í tíma. Hún hefur yfirborði yfir FD-þrepun í tíma eins og fram kemur hér á eftir.

Maxwellsjöfnurnar, sem lýsa þróun rafsegulsviðsins í tíma og rúmi og leysa þarf eru:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1a)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j}_{tr} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1b)$$

þar sem straumurinn er gefinn sem

$$\vec{j}_{tr} = \sigma \vec{E} + \vec{j}_{ext} \quad (2)$$

$\vec{E}(\vec{x}, t)$ er rafsviðið, $\vec{B}(\vec{x}, t)$ er segulsviðið og $\sigma(\vec{x})$ er eðlisleiðnin (einn á móti eðlisviðnámi).

Fyrri liðurinn í jöfnu (2), $\sigma \vec{E}$, lýsir leiðnistraumum í jörðinni, en seinni liðurinn, \vec{j}_{ext} , lýsir ytri straumi sem framkallaður er með straumsendi. Seinni liðurinn á hægri hlið jöfnu (1b) er kallaður færslustrumur (e. displacement current). Vegna smáðar rafsvörunarstuðulsins ϵ ($\approx 10^{-11} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2$) er færslustrumurinn mun minni en \vec{j}_{tr} og því má nota svokallaða nær-stöðuga nálgun (e. quasi-stationary approximation) og sleppa færslustraumnum.

Með því að taka tímaafleiðuna af jöfnu (1b), að slepptum færslustraumnum, og nota (1a) og (2) fæst nú

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \frac{\partial \vec{j}_{ext}}{\partial t} \quad (3)$$

Þessi diffurjafna lýsir rafsviðinu í jörðinni. Í loftinu fyrir ofan jörðu er leiðnin núll og eftir er ráð fyrir að uppsprettustrumurinn \vec{j}_{ext} sé einungis í yfirborði (eða neðanjarðar) uppfyllir rafsviðið í loftinu jöfnunni:

$$\nabla^2 \vec{E} = 0. \quad (4)$$

Lausn dæmisins felst nú í því að leysa jöfnur (3) og (4) fyrir gefin ytri straum \vec{j}_{ext} og með þeim randskilyrðum að sviðið falli að núlli langt frá uppsprettunni og að á yfirborði séu láréttir þættir rafsviðsins samfeldir en lóðréttur þáttur þess núll (enginn straumur úr jörðu og upp í loftið). Í TEM-mælingum er ytri straumurinn tröppufall í tíma, þ.e. sendur er fastur straumur og hann síðan rofinn skyndilega við tímann 0, þannig að

$$\vec{j}_{\text{ext}}(\vec{x}, t) = \theta(-t)\vec{j}_{\text{ext}}(\vec{x}) \quad ; \quad \frac{\partial \vec{j}_{\text{ext}}}{\partial t} = -\delta(t)\vec{j}_{\text{ext}}(\vec{x}) \quad (5)$$

þar sem $\theta(t)$ er einingar þrepfallið og $\delta(t)$ er "deltafall" Diracs.

Jöfnur (3) og (4) eru leystar tölulega með FD-aferð í rúmhnitum. Sett er upp réttthyrnt þrívítt hnitaneit í jörðinni og rafsviðið skilgreint á tengilínunum milli netpunkta (sjá mynd 2). Leiðnin getur verið mismunandi í réttthyrndum kubbum milli netpunkta (en sú sama innan hvers kubbs). Hér verður ekki farið út í smáatriði, en stiklað á stóru. Í FD-nálguninni verður rafsviðið, sem í raun er vektorsvið skilgreint í hverjum punkti rúmsins, táknað sem "discret" vektor í margvíðu vektorrúmi:

$$\mathbf{E}(t) = \begin{bmatrix} E_{ijk}^x \\ E_{ijk}^y \\ E_{ijk}^z \end{bmatrix} \quad (6)$$

þar sem i, j og k eru númer hnitpunkta í x, y - og z -stefnu. Vídd vektorrúmsins sem hinn "discretiseraði" rafsviðsvektor \mathbf{E} lifir í er því $NN = 3 \times N \times M \times L$, þar sem N, M og L eru fjöldi hnitpunkta í x, y - og z -stefnu. Diffurvirkinn á vinstri hlið jöfnu (3) verður nú að fylki sem verkar á rafsviðsvektorinn og FD-nálgun jöfnu (3) verður vektor jafnan:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = -\frac{d}{dt} \mathbf{E} + \delta(t) \mathbf{J}_0 \quad (7)$$

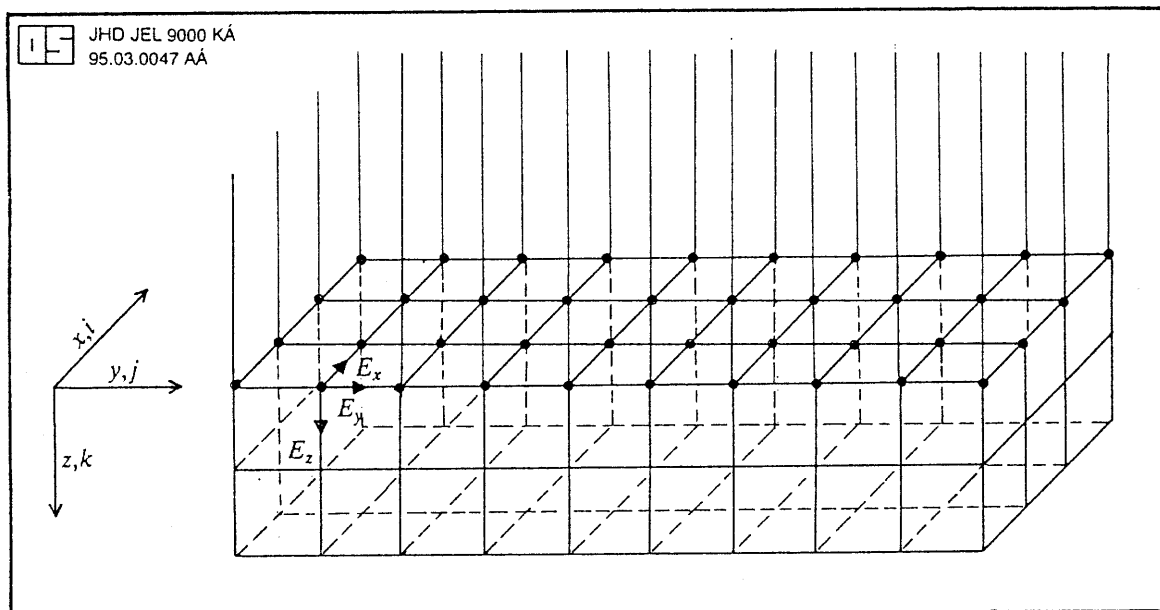
þar sem \mathbf{A} er $NN \times NN$ fylki og \mathbf{J}_0 er "discretiseraður" uppsprettustrumur. Við framsetningu á jöfnu (7) frá jöfnu (3) er, eftir "discretiseringu", deilt í gegn með μ og leiðninni σ , sem eftir "discretiseringu" verður hornalínufylki. Fylkið \mathbf{A} innheldur því, auk diffurvirkjans, upplýsingar um leiðnidreifinguna í líkaninu.

Yfirleitt höfum við ekki áhuga á að reikna rafsviðið í loftinu fyrir ofan jörðu heldur einungis rafsviðið í jörðinni og á yfirborði. Á yfirborði jarðar inniheldur "discretiseruð" útgáfa jöfnu (3) hins vegar þætti rafsviðsins rétt ofan yfirborðsins. Með því að nota samfellu rafsviðsins á yfirborði, og að í loftinu uppfyllir það jöfnu (4), er hægt að tákna rafsviðsþættina rétt ofan yfirborðs við rafsviðið á yfirborði og þar með losna alveg við rafsviðið ofan jarðar úr jöfnu (7).

Þetta er gert á eftirfarandi hátt. Eins og áður segir er z -þáttur rafsviðsins núll rétt neðan yfirborðsins. Þegar færslustrumnum í (1b) er sleppt, eins og hér er gert, verða engar hleðslur í yfirborðinu og lóðréttur þáttur rafsviðsins er því samfeldur og þar með núll rétt ofan yfirborðsins. Ekki þarf því að taka með z -þátt rafsviðsins ofan yfirborðsins í "discretiseraðri" útgáfa jöfnu (3), heldur einungis x - og y -þættina. Jafna (4) blandar ekki x - y - og z -þáttum rafsviðsins og er því í raun þrjár jöfnur, ein fyrir hvern þátt. Fyrir x - og y -þætti má rita (4) sem:

$$-\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] E^{x,y} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} E^{x,y} \quad (8)$$

Rúmhnitin í x - og y -stefnu eru nú "discretiseruð" en z -hnitið látið vera samfellt (sjá mynd 2). Láréttir þættir rafsviðsins lifa nú milli hnitalína og má rita sem vektora:



Mynd 2. Hnitnet í FD-aðferð. Öll rúmhnit eru "discretiseruð" neðanjarðar, en einungis láréttu hnitin ofanjarðar.

$$\mathbf{E}^{x,y}(z,t) = \mathbf{E}_{ij}^{x,y}(z,t) \quad (9)$$

þar sem i og j hlaupa yfir hnitpunkta í x - og y -stefnu. Diffurvirkinn á vinstri hlið jöfnu (8) verður nú að fylki \mathbf{B} og jafnan verður:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^{x,y} = \frac{d^2}{dz^2} \mathbf{E}^{x,y} \quad (10)$$

Formleg lausn þessarar jöfnu, sem stefnir að núlli hátt yfir jörðu ($z \rightarrow -\infty$, því z er 0 á yfirborði og vaxandi með dýpi) er nú:

$$\mathbf{E}^{x,y}(z,t) = e^{\sqrt{\mathbf{D}}z} \cdot \mathbf{E}^{x,y}(0,t) \quad ; \quad z \leq 0 \quad (11)$$

Þessi jafna gefur lárétta þætti rafsviðsins ofan yfirborðsins sem fall af þáttum þess á yfirborðinu. Lárétta þættirnir eru samfelldir í yfirborðinu og jöfnu (11) má því nota til að tákna þá þætti rafsviðsins rétt ofan yfirborðs, sem þátt taka í "discretiseraðri" útgáfa jöfnu (3), við þættina á yfirborði. Við þurfum á rafsviðinu að halda í lítilli hæð Δz yfir jörðu:

$$\mathbf{E}^{x,y}(-\Delta z,t) = e^{-\sqrt{\mathbf{D}}\Delta z} \cdot \mathbf{E}^{x,y}(0,t) \quad (12)$$

Þó að rafsviðið ofan yfirborðs sé formlega ákvarðað með jöfnu (12) er ekki alveg einfalt að reikna það út. Rafsviðið er gefið sem veldisfall af kvaðratrót fylkisins \mathbf{D} margfaldað með Δz . Útreikningur slíks veldisfalls er nokkrum vandkvæðum háður en hann má þó í þessu tilfalli framkvæma á eftirfarandi hátt. Fylkið \mathbf{D} er samhvort og jákvætt ákvarðað (e. positive definite). Á slíkum fylkjum er hægt að framkvæma eigingilda-

þáttun þ.a.

$$\mathbf{D} = \mathbf{V} \cdot \Theta \cdot \mathbf{V}^T \quad ; \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T = \mathbf{I} \quad (13)$$

þar sem Θ er hornalínufylki með eigingildum θ_i fyrir fylkið \mathbf{D} í hornalínu. Það að fylkið \mathbf{D} er jákvætt ákvarðað hefur í för með sér að öll eigingildi þess eru stærri en núll. \mathbf{V} er einingarrétt fylki (súlur þess eru einingarréttir eiginvektorar fylkisins \mathbf{D}) og \mathbf{I} er einingarfylkið. Með því að nota (13) í jöfnu (12) fæst:

$$\mathbf{E}^{x,y}(-\Delta z, t) = \mathbf{V} \cdot \text{diag}[e^{-\sqrt{\theta_i} \Delta z}] \cdot \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{E}^{x,y}(0, t) \quad (14)$$

Hér þarf ekki að reikna veldisfall af fylki heldur kemur fram hornalínufylki með veldisföllum af kvaðratrótum eigingilda, margfölduðum með Δz , og einungis þarf að framkvæma tvær fylkjamargfaldanir. Gjaldið sem greiða þarf fyrir þessa einföldun er að sjálfsögðu það að framkvæma þarf eigingildabáttun á fylkinu \mathbf{D} og slíkt krefst mikilla reikninga. Fyrir líkön með 40 hnitpunkta í x - og y -stefnur verður vektorrúmið, sem rafsviðsvektorinn í jöfnu (14) tekur gildi sín í, af víddinni $NS = 40 \times 40$ og fjöldi staka í fylkinu \mathbf{D} er þá $NS \times NS = 2560000$. Til þess að geyma slíkt fylki í tölvuminni þarf yfir 20 milljón bæti, en slíkt er vel gerlegt. Eigingildabáttunin og útreikningurinn í jöfnu (14) er því frek bæði á reiknitíma og minni, en við því er ekkert að gera.

Ekki þarf að koma á óvart að nokkur fyrirhöfn sé því samfara að taka tillit til hegðunar rafsviðsins ofan jarðar. Önnur leið en sú sem lýst er hér að framan hefði verið að "discretisera" allar þrjár rúmvíddirnar í loftinu og leysa fyrir rafsviðið í öllu rúminu. Sú aðferð hefði leitt til miklu stærri vektora og fylkja en hér eru notuð og þar með miklu meiri reikninga.

Þegar láréttir þættir rafsviðsins ofan yfirborðsins hafa verið ákvarðaðir sem fall af láréttum þáttum á yfirborði er hægt að nota það samband til að setja upp diffurjöfnu fyrir "discretiserað" rafsvið einungis í og neðan yfirborðs eins og gert er í jöfnu (7). Formleg lausn jöfnu (7) er:

$$\mathbf{E}(t) = e^{-\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{J}_0 \quad (15)$$

Þessi jafna lýsir þróun rafsviðsins í tíma eftir að slökkt hetur verið á straumuppsprettunni (sendinum). Í þeim TEM-mælingum, sem mest hafa verið notaðar hér á landi, er notuð ferningslaga lykkja á yfirborði sem straumuppspretta og tímaafleiðan af segulsviðinu í miðju sendilykkjunnar er mæld sem fall af tíma (span í móttökuspólu). Lykkjuna má nálga með uppsprettu \mathbf{J}_0 eftir tengilínum milli hnitpunkta fernings á yfirborði hnitansins. Tímaafleiðu segulsviðsins má auðveldlega reikna með FD-nálgun á jöfnu (1a) hér að framan. Jöfnur (15) og (1a) má einnig nota til að reikna rafsvið og segulsvið á yfirborði og neðanjarðar fyrir hvers konar straumuppsprettur í yfirborði eða neðan jarðar.

Þó að vandamálið sé formlega leyst með jöfnu (15) er ekki alveg einfalt að reikna rafsviðið sem fall af tíma. Fylkið \mathbf{A} er reyndar samhverft og ekki neikvætt ákvarðað (e. non-negative definite). Það er því hægt að þátta með eigingildabáttun svipað og \mathbf{D} í jöfnu (13):

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \Gamma \cdot \mathbf{U}^T \quad (16)$$

þar sem Γ er hornalínufylki með eigingildum γ_i fyrir fylkið \mathbf{A} í hornalínu og \mathbf{U} er ein-

ingarrétt eiginvektorafylki fylkisins A . Það að fylkið A er ekki neikvætt ákvarðað þíðir að engin eignigildanna eru negatíf heldur núll eða pösitif.

Með því að þátta fylkið má rita jöfnu (15) sem:

$$E(t) = U \cdot \text{diag}[e^{-\gamma_i t}] \cdot U^T \cdot J_0. \quad (17)$$

Hér er þó hængur á. Fylkið A er, fyrir raunhæf líkön, geysistört. Fyrir líkön sem hafa 40 hnitpunkta í x - og y -stefnu (láréttar stefnur) og 20 í z -stefnu (dýpi) er vídd vektor-rúmsins u.þ.b. $NN = 96000$ og fylkið A inniheldur því um $9.2 \cdot 10^9$ kommutölur. Ef það er geymt að fullu í tölvu tekur það um $7.4 \cdot 10^{10}$ bæti sem er fjarri því að hægt sé að meðhöndla í venjulegum tölvum. Reyndar er fylkið A sjálft mjög gisið. Ef einungis eru geymdir þeir stuðlar þess sem ekki eru núll þá er það margfalt minna en lýst er hér að framan og vel geymanlegt í tölvu. Sé það hins vegar þáttað með eigingildapáttun verður fylkið U fullt og því engan veginn meðfærilegt þ.a. ekki er mögulegt að nota jöfnu (17) til útreikninga á rafsviðinu.

Önnur leið, sem virðist liggja nokkuð beint við, er að nota tímaþrepun með fyrstu gráðu Taylor-nálgun á veldisfallinu í jöfnu (15):

$$e^{-A\Delta t} \approx I - A\Delta t \quad (18)$$

sem gildir fyrir lítil Δt . Því má fyrir nógu lítil Δt nota að:

$$E(m\Delta t) \approx [I - A\Delta t] \cdot E((m-1)\Delta t) \approx [I - A\Delta t]^m \cdot J_0 \quad (19)$$

Vandinn við slíka tímaþrepun er að hún er einungis samleitin ef tímaþrepin eru mjög lítil. Af (16) sést að:

$$[I - A\Delta t]^m = U \cdot \text{diag}[(1 - \gamma_i \Delta t)^m] \cdot U^T \quad (20)$$

sem augljóslega er ekki samleitid nema $\Delta t < 2/\gamma_{\max}$ þar sem γ_{\max} er stærsta eigingildi fylkisins A . Fylkið A hefur stór eigingildi og þar með þarf Δt að vera lítið. Við hvert tímaskref þarf að framkvæma eina margföldun með fylkinu A . Til að reikna rafsviðið fyrir raunhæf gildi á t þarf að framkvæma mjög margar slíkar margfaldanir, sem er of tímafrekt. Þetta verður einkum áberandi þegar haft er í huga að niðurstöðurnar eru settar fram sem gildi jafn dreifð í lógaritma af tíma. Fjöldi tímaþrepa sem þarf að bæta við, til að bæta við búi í niðurstöðutferilinn, vex því veldislega eftir því sem lengra kemur út á ferilinn.

Hægt er að beita nálgun á jöfnu (15) sem kemst að verulegu leyti framhjá þeim samleitnivandamálum sem lýst er hér að framan með því að nota svokallaða Lanczos spectur þáttun (e. Lanczos spectral decomposition). Sú aðferð byggir á því að fyrir endanlegt t tekur rafsviðsvektorinn $E(t)$ að mestu gildi innan undirrúms sem hefur verulega lægri vídd en NN . Búnir eru til einingarréttir grunnvektorar í þessu undirrúmi og sett upp diffurjafna hliðstæð jöfnu (7) fyrir þætti rafsviðsvektorsins eftir grunnvektorunum og sú jafna leyst analytist. Með því móti er búin til analytisk nálgun sem innifelur framlag stærstu eigingilda fylkisins A og er því stöðug fyrir tiltölulega stór t .

Samkvæmt skilgreiningu á veldisfallinu má rita jöfnu (15) sem:

$$\mathbf{E}(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{J}_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \mathbf{A}^i \cdot \mathbf{J}_0 \quad (21)$$

Ef summan er nálgðuð með n fyrstu liðunum þá er rafsviðsvektorinn nálgður með $\mathbf{E}_n(t)$ þannig að:

$$\mathbf{E}(t) \approx \mathbf{E}_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!} \mathbf{A}^i \cdot \mathbf{J}_0 \quad (22)$$

Þessi jafna segir að vektorinn $\mathbf{E}_n(t)$ sé í vektorundirrúminu V_n sem spannað er af \mathbf{J}_0 og fyrstu $n-1$ margfeldunum með \mathbf{A} , þ.e.

$$\mathbf{E}_n(t) \in V_n = \text{span}\{\mathbf{J}_0, \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_0, \dots, \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{J}_0\} \quad (23)$$

Næsta skref í ákvörðun nálgunarvektorsins $\mathbf{E}_n(t)$ er að búa til einingarréttan grunn $G_n = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n\}$ í vektorrúminu V_n . Þetta er gert með því að krefjast þess að grunnvektorarnir uppfylli eftirfarandi rekjandi jöfnu:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}_i = \beta_{i-1} \mathbf{q}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{q}_i + \beta_i \mathbf{q}_{i+1} ; i = 1, \dots, n-1 \quad (24)$$

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{J}_0 / |\mathbf{J}_0| ; \beta_0 = 0$$

Stuðlarnir α_i og β_i ákvarðast einhlítt með því að krefjast þess að vektorarnir \mathbf{q}_i séu hornréttir hver á annan og hafi lengdina 1.

Vektorinn $\mathbf{E}_n(t)$ má nú rita í grunninum G_n sem

$$\mathbf{E}_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) \mathbf{q}_i \quad (25)$$

Þess er nú krafist að $\mathbf{E}_n(t)$ uppfylli sömu diffurjöfnu og $\mathbf{E}(t)$, það er jöfnu (7):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_n = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_n + \delta(t) \mathbf{J}_0 \quad (26)$$

Með því að setja (25) inn í (26) og taka ofnvarpið á grunnvektorana fást diffurjöfnur fyrir stuðlana c_i (hnit \mathbf{E}_n í grunninum G_n). Með því að rita stuðlana c_i sem n -víðan súluvektor

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{c}_0 = \begin{bmatrix} |\mathbf{J}_0| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

má rita þessar diffurjöfnur sem vektorjöfnu:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{c} = -\frac{d}{dt} \mathbf{c} + \delta(t) \mathbf{c}_0 \quad (28)$$

þar sem fylkið \mathbf{T} hefur stuðlana α_i í jöfnu (24) í hornalínu og β_i í næsta bandi beggja vegna hornalínunnar. Aðrir stuðlar fylkisins \mathbf{T} eru núll.

Diffurjafnan (28) hefur lausnina

$$\mathbf{c}(t) = e^{-\mathbf{T}t} \cdot \mathbf{c}_0 \quad (29)$$

Þessi lausn lítur eins út og lausnin í (15) hér að framan og því vaknar sú spurning hvort nokkuð hafi á unnist. Það sem unnist hefur er, að fylkið \mathbf{T} er margfalt minna en fylkið \mathbf{A} , því að n (vídd vektorrúmssins V_n) er miklu minni en NN (vídd upphaflega vektorrúmsins). Fylkið \mathbf{T} er samverft og hefur einungis hornalínuna og næsta band utan hennar frábrugðið frá núlli. Fylkið er að auki jákvætt ákvarðað og það má þátta með eigingildapáttun:

$$\mathbf{T} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{O}^T \quad (30)$$

þar sem $\mathbf{\Lambda}$ er hornalínufylki með eigingildunum λ_i fyrir fylkið \mathbf{T} í hornalínu og \mathbf{O} er fylki með tilsavrandi einingarréttum eiginvektorum. Fylkið \mathbf{T} er það mikið minna en fylkið \mathbf{A} að vel er gerlegt að framkvæma eigingildapáttun þess. Þá má rita (29) sem:

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{O} \cdot \text{diag}[e^{-\lambda_i t}] \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{c}_0 \quad (31)$$

og þar með er rafsviðið gefið sem:

$$\mathbf{E}_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) \mathbf{q}_i \quad (25)$$

Jöfnur (31) og (25) eru analytísk lausn fyrir nálgunarvektorinn \mathbf{E}_n og ekki er um neina tímabrepu að ræða. Formlega séð er því hægt að reikna rafsviðið fyrir hvaða tíma t sem er. Þegar t er látið vaxa kemur þó að því að lausnin verður óstöðug vegna þess að það er ekki lengur nógu góð nálgun að gera ráð fyrir að nálgá megi rafsviðsvektorinn í (15) með vektor í n -víðu undirrúmi. Til þess að halda nákvæmni fyrir stærri t þarf að taka n stærra og reikna fleiri grunnvektora.

Af (23) og (24) sést að fyrir hvern nýjan grunnvektor þarf að framkvæma eina margföldun með fylkinu \mathbf{A} og fyrir n -víðan nálgunarvektor þarf að framkvæma $n-1$ margfaldanir. Þessar margfaldanir eru tímafrekar og því er mikilvægt að halda þeim í lágmarki. Eins og áður kom fram, þarf eina margföldun með fylkinu fyrir hvert skref í tímabrepu. Kostur Lanczos spectur þáttunar umfram tímabrepu er, að til að fá stöðuga lausn upp að gefnu t þarf að reikna mun færri grunnvektora en þau tímabrep sem taka þarf til að ná t . Af jöfnu (19) sést, að sá fjöldi þrepa sem þarf að framkvæma til að reikna rafsviðið upp að tímanu t er í beinu hlutfalli við t , en hægt er að sýna fram á (Druskin og Knishnerman, 1988) að í Lanczos spectur þáttun er fjöldi grunnvektora sem reikna þarf í hlutfalli við \sqrt{t} . Reynslan hefur sýnt, að til að reikna lausn fyrir t upp að um 0,1 s þarf að taka tugi þúsunda tímabrepa en einungis á milli eitt og tvö þúsund grunnvektora í Lanczos spectur þáttun, sem þýðir að meira en tífalt minni tími fer í að margfalda með fylkinu \mathbf{A} . Á móti kemur að eigingildapáttun á fylkinu \mathbf{T} í jöfnu (30) er nokkuð tímafrek en hún tekur þó ekki nema brot af þeim tíma sem sparast við fækkun margfaldana með fylkinu \mathbf{A} .

Skrifað hefur verið forrit sem framkvæmir þá reikninga sem lýst hefur verið hér að framan. Forritið, sem kallað er TEMDDD, var skrifað í Ansi-C forritunarmálinu. Það forritunarmál var notað einkum vegna þess að það býður upp á sveigjanlega nýtingu tölvuminnis, en þegar verið er að fást við svo stór reiknivandamál sem hér um ræðir

skiptir miklu máli að nýta minni vélanna eins vel og hægt er. Ennfremur kom í ljós við prófanir að Ansi-C skilar verulega hraðvirkari keyrslukóða en FORTRAN, hefðbundið C og C++. Við gerð forritsins var lögð töluverð hugsun og vinna í að nýta minni sem allra best. Eins og fram kom er fylkið A formlega séð geysistört, en það er gisið og samhverft. Með því að geyma einungis þau stök fylkisins sem eru frábrugðin núlli og nota samhverfu þess eins og hægt er, verður fylkið af viðráðanlegri stærð, en er samt langminnisfrekasti hluti forritsins og gerir miklar kröfur til minnisstærðar. Til að mynda þarf, undir fylkið A, rúmlega 25 Mb (megabæti) fyrir líkan með $NN = 40 \times 40 \times 20$ hnitpunkta (40 í hvora lárétta stefnu og 20 í lóðrétta) og rúmlega 60 Mb fyrir líkan með $NN = 50 \times 50 \times 30$ hnitpunkta, en nauðsynlegt getur verið að nota svo stór net til að fá næga reikninákvæmni og svigrúm til að setja upp líkön.

Áhersla var einnig lögð á að skrifa forritið þannig að reikningar væru sem hraðastir því framkvæma þarf geysilegan fjölda reikniadgerða (allt upp í nokkra miljarða kommutöluadgerða). Reikningar af þessu tagi gera því miklar kröfur til tölvubúnaðar, bæði minnisstærðar og reiknihraða. Afkastamesta tölva Orkustofnunar til reikninga er HP9000/735 vinnustöð (Blesi). Sú tölva hefur 148 Mb vinnsluminni og ræður því nokkuð vel við reikninga af þessu tagi. Einnig hefur verið fenginn aðgangur að DEC-Alpha 3000/600 vél á Veðurstofu Íslands, en sú vél er með 128 Mb minni. Þessi vél er um 30% hraðvirkari en Blesi. Reiknitími forritsins er, á vél Veðurstofunnar, frá um 30 mínútum fyrir lítil líkön ($NN = 30 \times 30 \times 20$) og upp í 3 klukkustundir fyrir stór líkön (um og yfir $NN = 40 \times 40 \times 25$).

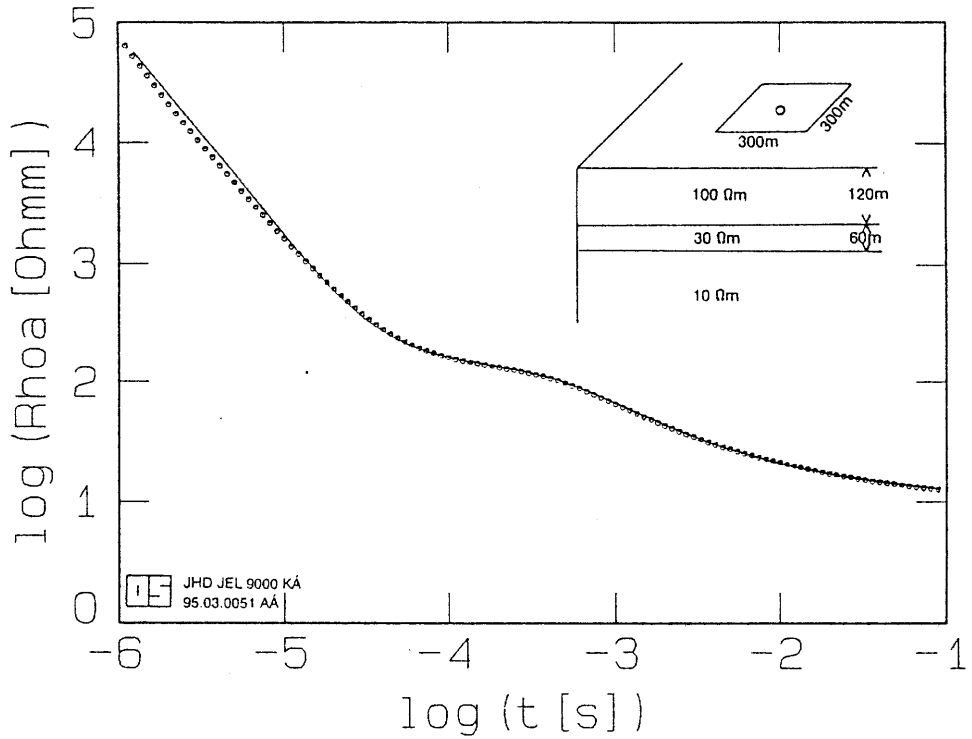
3. DÆMI UM NIÐURSTÖÐUR

3.1 Samnaburður við önnur forrit

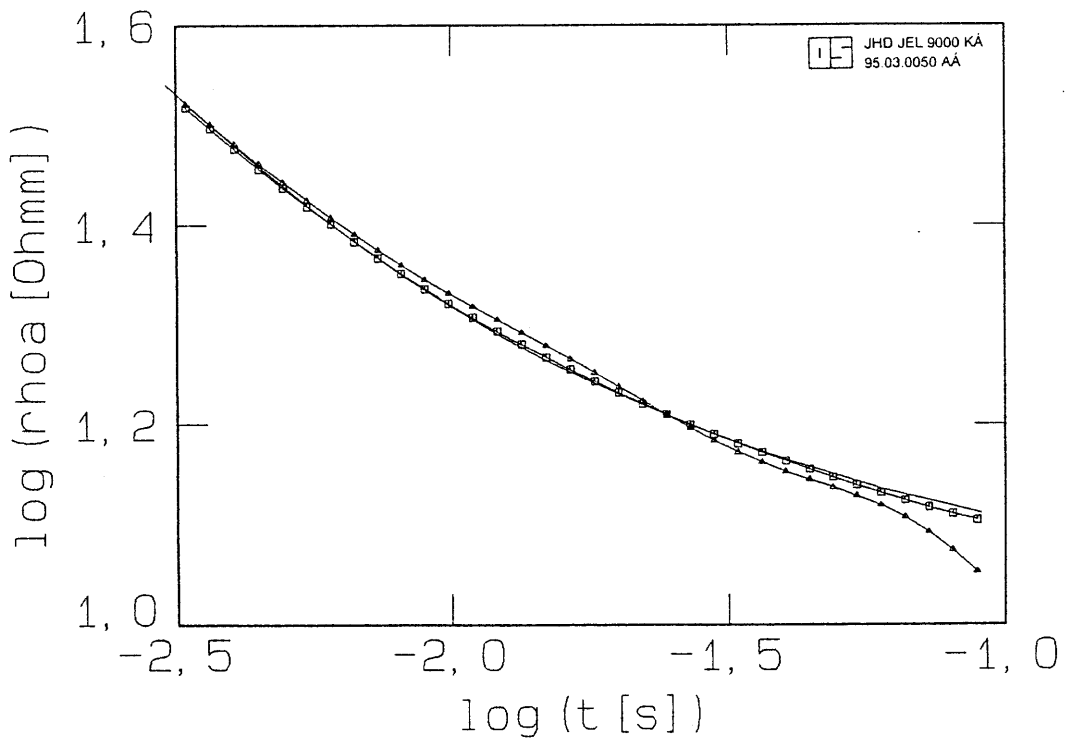
Forritið hefur verið nothæft í nokkurn tíma og verið keyrt til reynslu. Megináherslan hefur hingað til verið lögð á að bera niðurstöður þess saman við niðurstöður annarra forrita. Þetta er mjög mikilvægt, því nauðsynlegt er að vita hversu nákvæmar niðurstöðurnar eru.

Fyrsti prófsteinninn er að reikna svörun lárétt lagskiptrar jarðar. Með einvíðum forritum er hægt að reikna svörun lárétt lagskiptrar jarðar með mikilli nákvæmni. Fyrsta krafan sem gerð er til þrívíða forritsins er að fyrir lárétt lagskipt líkön beri niðurstöðum þess saman við niðurstöður einvíðra forrita. Á mynd 3 eru sýndir reiknaðir ferlar fyrir þriggja laga líkan. Efst er 120 m þykkt lag með 100Ω , síðan 60 m þykkt lag með 30Ω og neðst er óendanlegt hálfbrúm með 10Ω . Heildregni ferillinn sýnir reiknaðan sýndarviðnámsferil með einvíðu forriti, en punktarnir feril reiknaðan með þrívíða forritinu þar sem notað var $40 \times 40 \times 24$ punkta net og 2000 grunnvektorar í Lanczos spectur þáttuninni.

Á mynd 3 sést að fyrir $t < 10^{-5}$ s vikur ferillinn sem reiknaður er með þrívíða forritinu nokkuð frá ferli reiknuðum með einvíðu forriti. Fyrir þessu eru tvær ástæður. Önnur ástæðan er sú að í reikningunum í þrívíða forritinu er sendilykkjan ferningslaga, 300 m á kant, en í einvíða forritinu er sendilykkjan hringlaga með sama flatarmáli (radíus 169,3 m). Þessi munur í geometríu hefur áhrif á sýndarviðnámsferilinn fyrst eftir að



Mynd 3. Sýndarviðnámsferill fyrir lárétt lagskipta jörð. Heildreginn ferill er reiknaður með einvíðu forriti en punktar með TEMDDD.



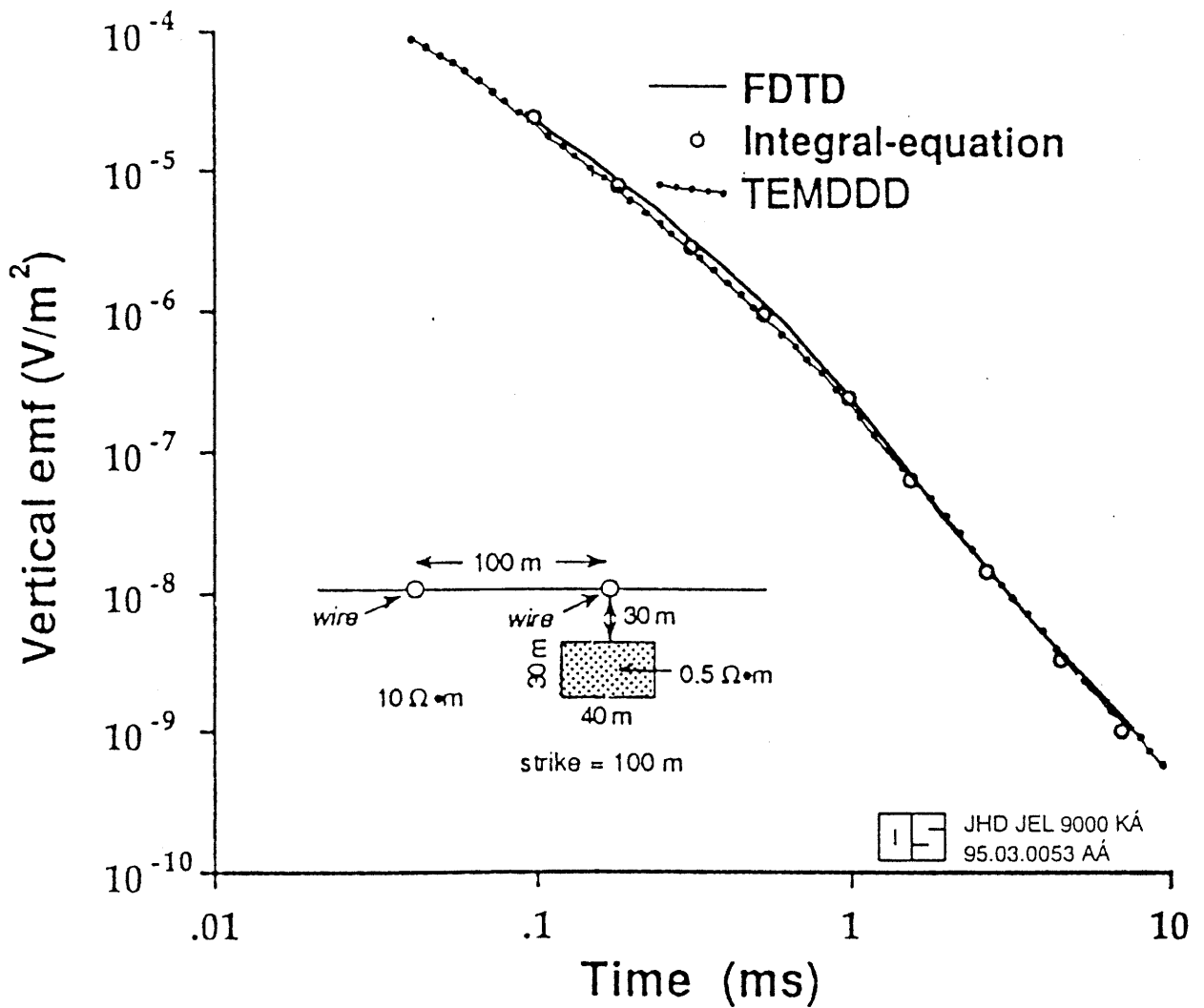
Mynd 4. Sýndarviðnámsferill fyrir lárétt lagskipta jörð (sama líkan og á mynd 3) og stórt t. Heildreginn ferill er reiknaður með einvíðu forriti, ferningar með TEMDDD og 40x40x24 neti, þríhyrningar með TEMDDD og 32x32x20 neti.

slökkt er á straumnum í lykkjunni. Hin ástæðan liggur í FD-nálguninni. Þegar rúmhnitin eru "diskretiseruð" með endanlegri fjarlægð Δ milli hnitapunkta inniheldur tíðniróf lausnarinnar einungis endanlega háar tíðnir ($\omega \leq \omega_{\max} \propto (\Delta\mu\sigma)^{-1}$). Hæstu tíðnirnar ráða mestu í lausninni fyrir lítil t , en eftir því sem tíminn líður dvína áhrif þeirra. Þetta má sjá á jöfnu (17) því eigingildin γ_i eru í hlutfalli við tíðniþætti lausnarinnar og þáttur hvers eigingildis fellur veldislega í tíma (rafsvið í leiðandi efni hefur "diffusíva" hegðun) og áhrif stærstu eigingildanna (hæstu tíðnanna) dvína fyrst. Þetta þýðir að sá eiginleiki FD-nálgunarinnar að skera ofan af tíðnirófi lausnarinnar veldur fráviki frá nákvæmri lausn við lítil t en það frávik minnkar með tíma.

Á mynd 4 er sýndur hluti (fyrir stór t) sýndarviðnámsferlanna á mynd 3 (heildregin lína fyrir einvíða forritið og ferningar fyrir það þrívíða). Á mynd 4 er einnig sýndur ferill (þríhyrningar) fyrir sama þriggja laga líkan reiknaður með þrívíða forritinu, en með minni nákvæmni. Þessi ferill er reiknaður með neti sem hefur $32 \times 32 \times 20$ punkta og einungis notaðir 1000 grunnvektorar. Á myndinni sést að meðan ferillinn sem reiknaður er með stóru neti fellur vel að þeim sem reiknaður er með einvíðu forriti þá vîkur sá fyrir litla netið nokkuð frá. Sjá má að hann sveiflast kringum einvíða ferilinn og fer síðan að vîkja verulega frá þegar t nálgast 0,1 s. Ástæður þessa eru of gróft net og of fáir grunnvektorar. Sveiflurnar kringum einvíða ferilinn eru vegna þess að netið er ekki nógu fínskipt nógu langt út frá sendilykkjunni. Frávikið í lokin er vegna þess að grunnvektorarnir eru of fáir til þess að lausnin sé samleitin upp að 0,1 s. Lausnin með stærra netinu og 2000 grunnvektorum verður einnig ósamleitin þegar t nálgast 1,0 s

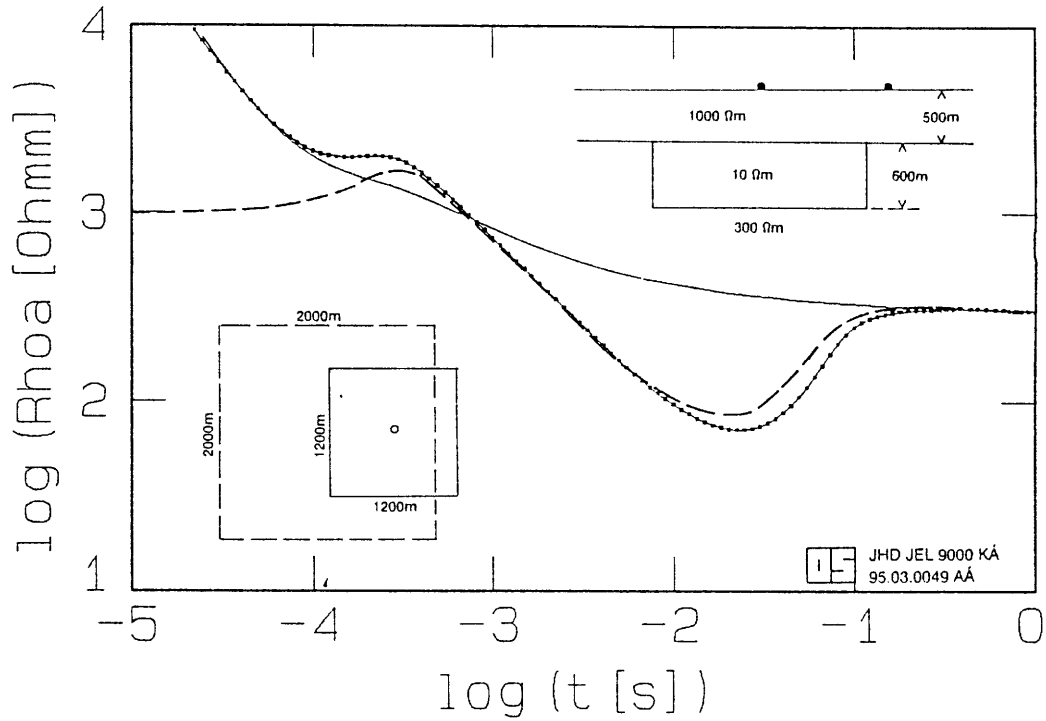
Mynd 5 sýnir samanburð á niðurstöðum TEMDDD (heildregin lína með punktum) og tveggja erlendra forrita, þ.e.a.s. IE-forits Newmans o.fl. (1986) (hringir) og FD-forrits Wangs og Hohmanns (1993) (heildregin sver lína). Líkanið er ferhyrndur kassi með eðlisviðnámi 0,5 Ωm í hálfrúmi með eðlisviðnámi 10 Ωm . Kassinn er 100 m langur og með þverskurðinn $30 \times 40 \text{ m}^2$ (sjá mynd 5). Sendilykkjan er ferningslaga, 100 m á kant og er lágviðnámskassinn 30 m undir einni hlið lykkjunnar. Myndin sýnir mælda spennu í móttökuspólu í miðju lykkjunnar, sem fall af tíma (gert er ráð fyrir að móttökuspólan sé 1 m^2 og straumurinn í sendilykkjunni sé 1 A). Á mynd 5 sést að öllum forritunum ber nokkuð vel saman. Einna helst er að sjá frávik fyrir stór t , en þar virðast FD-forritin gefa heldur hærri spennu. Ástæða þess er trúlega sú að hnitasetin FD-forritunum eru ekki nógu fínskipt langt frá uppsprettunni.

Viðnámsbreytingarnar í líkaninu á mynd 5 er til þess að gera vægar, eða einungis 20:1 milli hálfrúmsins og kassans. Við stærri viðnámsbreytingar reynir meira á reiknínákvæmnina. Mynd 6 sýnir samanburð á niðurstöðum TEMDDD og IE-forits Newmans o.fl. (1986) þar sem mesta viðnámsbreyting er 100:1. Líkanið hefur lágviðnámskass með 10 Ωm í tveggja laga jörð (sjá mynd 6). Efra lagið er 500 m þykkt og með viðnámið 1000 Ωm , en 300 Ωm þar fyrir neðan. Lágviðnámskassinn er neðan efra lagsins og 2000 m á kant í láréttar stefnur og 600 m þykkur. Sendilykkjan er 1200 m á kant og er miðja hennar 600 m til hliðar við miðju kassans eins sýnt er á mynd 6. Myndin sýnir reiknaðan sýndarviðnámsferil með IE-forritinu sem slitna línu (ferillinn er tekinn upp úr grein eftir Newman o.fl., 1987), feril reiknaðan með TEMDDD sem heila línu með punktum og til samanburðar feril fyrir tveggjalaga líkan án lágviðnámskassa sem heila línu án punkta (reiknað með einvíðu forriti). Á mynd 6 sést nokkur munur á ferlunum. Fyrir lítil t liggur ferillinn, sem reiknaður er með IE-forritinu, nokkuð fyrir neðan hina.

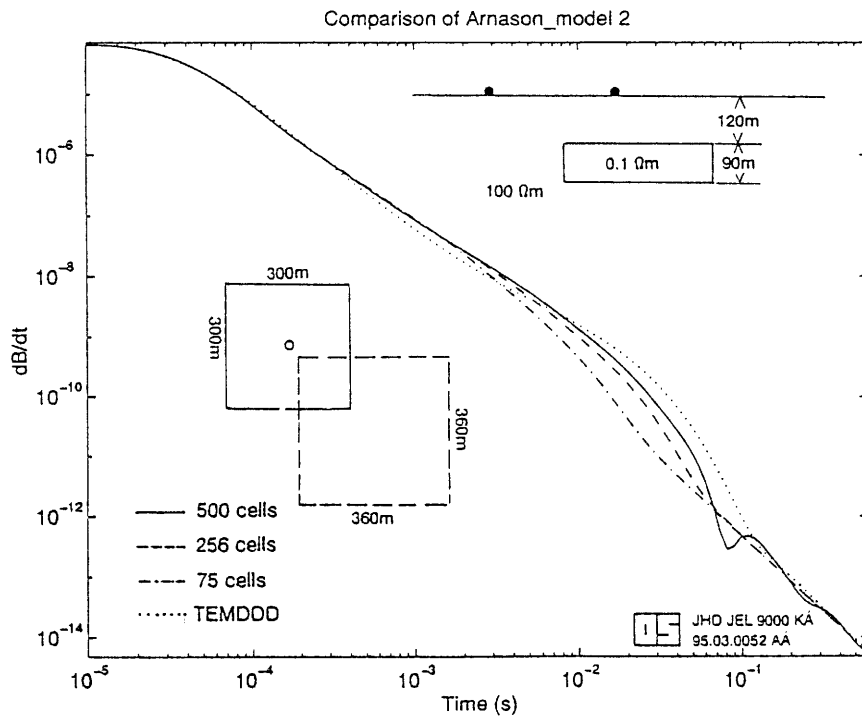


Mynd 5. Samanburður á niðurstöðum TEMDDD (heildregin lína með punktum), IE-forrits Newmans o.fl. (1986) (hringir) og FD-forrits Wangs og Hohmanns (1993) (heildregin sver lína). Viðnámsbreyting í líkani er 20:1.

Þessi munur er eðlilegur því Newman o.fl. nota aðra skilgreiningu á sýndarviðnámi en gert er í TEMDDD og einvíða forritinu (sjá Newman o.fl., 1987). Þessi munur á skilgreiningu veldur því að forrit Newmans o.fl. sýnir lægra sýndarviðnám fyrir lítil t , og nær raunverulegu viðnámi í efsta laginu. Eftir því sem t stækkar nálgast ferlarnir og eiga að gefa sömu niðurstöðu við stór t . Á myndinni sést að þrívíðu ferlarnir falla saman fyrir t á bilinu $10^{-3.5}$ til 10^{-2} s en á bilinu 10^{-2} til 10^{-1} s kemur aftur fram munur. Á þessu bili gefur TEMDDD lægra sýndarviðnám en forrit Newmans o.fl. og sá munur endurspeglar raunverulega mismunandi niðurstöður forritanna. Erfitt er að skera hér úr með vissu hvort forritið reiknar réttar, en rökstuddur grunur er um að hér beri að treysta TEMDDD og skal nú rakið á hverju sá grunur byggist.



Mynd 6. Samanburður á niðurstöðum TEMDDD og IE-forrits Newmans o.fl. (1986). Viðnámsbreyting í líkani er 100:1. Heildreginn ferill með punktum er reiknaður með TEMDDD, brotinn ferill með IE-forritinu og heildreginn ferill með einvíðu forriti án lágviðnámskassans.



Mynd 7. Samanburður á niðurstöðum TEMDDD og nýjasta IE-forrits CEMI-hópsins (Xiong, 1994; pers.uppl.). Viðnámsbreyting í líkani er 1000:1.

Nýjasta IE-forritið frá CEMI hópnum var skrifað af Dr. Zonhou Xiong við háskólann í Utah í Bandaríkjunum og hefur verið haft samband við hann til að bera niðurstöður þess forrits saman við niðurstöður TEMDDD. Bornar voru saman niðurstöður fyrir viðnámsbreytingar upp á 50:1 og 1000:1. Forritunum bar vel saman við viðnámsbreytingar upp á 50:1, en fyrir viðnámsbreytingu upp á 1000:1 gáfu þau nokkuð mismunandi niðurstöður. Mynd 7 sýnir reiknaða spanspennu í móttökuspólu í miðju 300x300 m² lykkju á yfirborði hálfkrúms með viðnámið 100 Ωm. Í hálfkrúminu er lágviðnámskassi sem er 360 m á kant í láréttar stefnur og 90 m þykkur. Kassinn er á 120 m dýpi og með viðnámið 0.1Ωm og afstaða hans miðað við lykkjuna er sýnd á mynd 7. Myndin sýnir reiknaða spanspennu með TEMDDD (punktalína) og og þrjá ferla reiknaða með IE-forritinu og misfínni skiptingu lágviðnámskassans upp í hlutkassa (brotnar línur og heil). Í IE-forritinu er notuð samhverfa og hlutkassarnir eru því í raun fjórum sinnum fleiri en fram kemur á myndinni. Á myndinni má glögg sjá, að eftir því sem reikninákvæmni IE-forritsins er aukin með fínni skiptingu, þá nálgast niðurstaðan ferillinn sem reiknaður er með TEMDDD (reyndar er kominn óstöðugleiki í lausnina með flestum bútunum). Líkanið var endurreiknað með TEMDDD með fínskiptara neti og hafði það óveruleg áhrif á niðurstöðuna. Þetta bendir eindregið til þess að ferillinn sem reiknaður var með TEMDDD sé nær lagi en IE-ferlarnir.

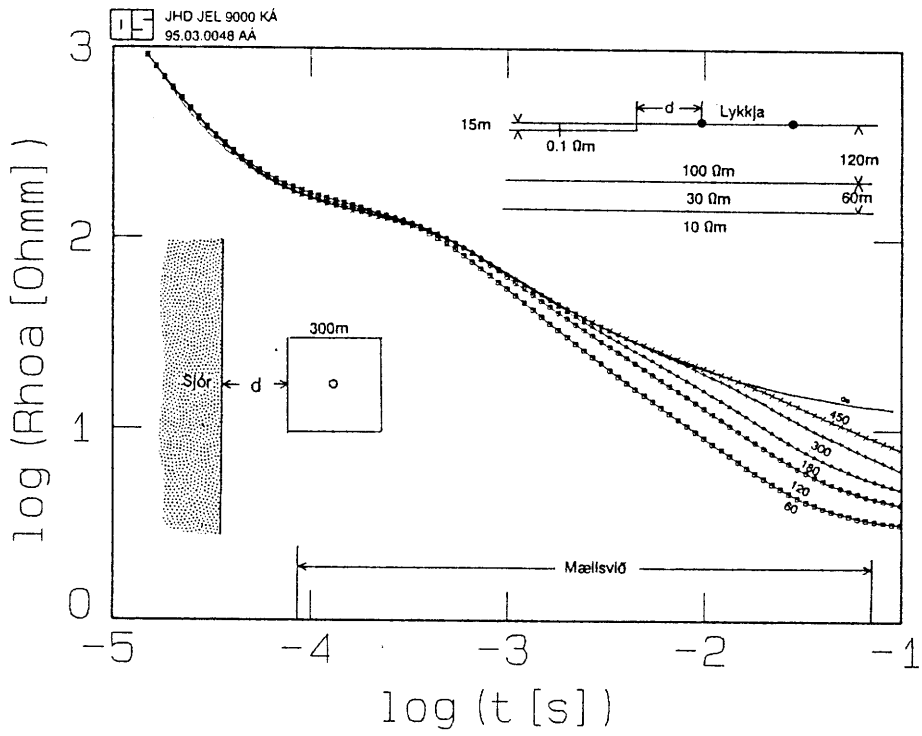
Þessi niðurstaða er áhugaverð í ljósi samanburðarins á mynd 6. Líkónin sem hér er um að ræða eru svipuð að eðli til þó að viðnámsbreytingin í líkaninu á mynd 7 sé meiri. Sýndarviðnámið er í hlutfalli við spanspennuna í veldinu -2/3 (fyrir stór t gildir þetta einnig um sýndarviðnámið sem Newman o.fl. nota). Of lág spanspenna gefur því of hátt sýndarviðnám. Forrit Xions og Newmans o.fl. eru náskyld og byggja á sömu aðferð. Af mynd 7 sést að IE-forritið gefur of lága spennu fyrir t á bilinu 10⁻² til 10⁻¹ og þar með of hátt sýndarviðnám. Þetta er í samræmi við það að IE-forritið gefur hærra sýndarviðnám en TEMDDD á þessu bili eins og sést á mynd 6.

Eins og áður hefur komið fram er, með IE-aðferðinni, erfitt að taka að fullu tillit til spanstruma sem myndast í lágviðnámskassa sem er í háviðnámsumhverfi (Newman og Homann, 1988). Í TEMDDD er tekið fullt tillit til slíkar spanstrauma. Þessi munur á IE- og FD-aðferðunum getur skýrt þann mun sem fram kemur í niðurstöðunum. Reyndar er við því að búast að ófullkomin meðhöndlun á spanstraumum muni einmitt gefa of lága spennu, sem er í samræmi við niðurstöðurnar á mynd 7.

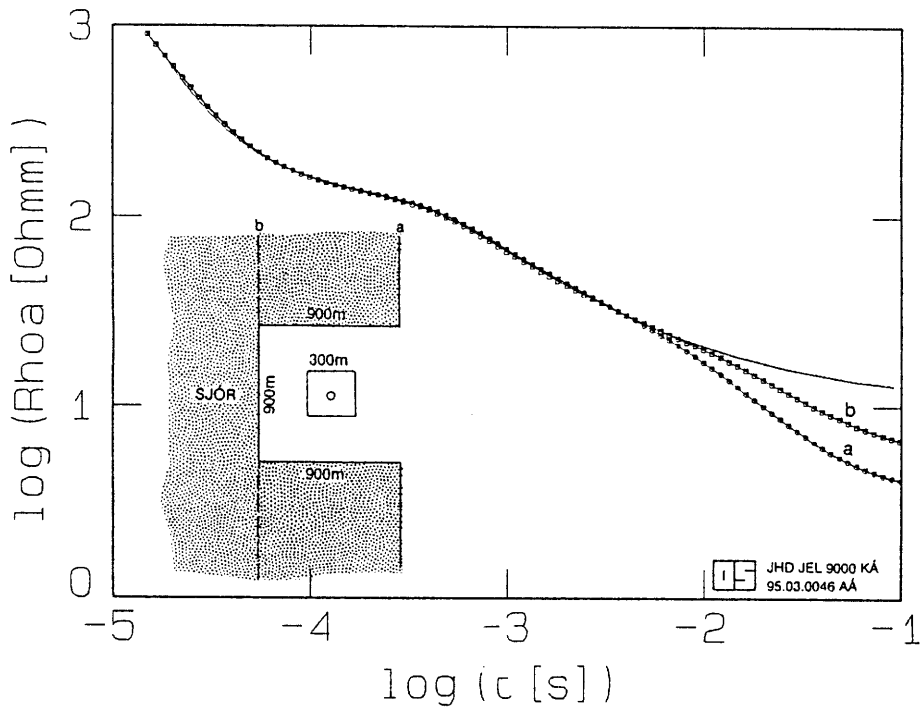
Að lokum er hér rétt að benda á að mældu sýndarviðnámsferlarnir á myndum 1a og 1b hafa svipuð einkenni og ferlarnir á mynd 6. Þetta sýnir að í nánd þeirra staða sem mælingarnar á myndum 1a og 1b eru gerðar eru lágviðnámssvæði með takmarkaða útbreiðslu í lárétta stefnu.

3.2 Áhrif sjávar á TEM-mælingar

Sem dæmi um bein not af forritinu TEMDDD verður hér fjallað um áhrif sjávar á TEM-mælingar. Reynsla af notkun TEM-mælinga nálægt sjávarströndum hérlendis hefur vakið upp grunsemdir um að áhrif sjávarins á mælingarnar séu meiri en haldið var í fyrstu. Það er því verulega áhugavert að kanna hver áhrif sjávarins eru í raun og veru.



Mynd 8. Áhrif sjávar á TEM-mælingar í mismunandi fjarlægð frá sjó.



Mynd 9. Áhrif sjávar á TEM-mælingu á nesi (ferill a) og 300 m frá beinni strönd (ferill b). Lagskipting jarðar er sú sama og á mynd 8.

Mynd 8 sýnir áhrif sjávar á TEM-mælingar sem gerðar eru í mismunandi fjarlægð frá beinni sjávarströnd. Viðnámsskipan jarðarinnar er hér með þremur viðnámslögum. Efst er 120 m þykkt lag með 100 Ω m, þar fyrir neðan er 60 m þykkt lag með 30 Ω m og neðst er hálfrúm með 10 Ω m. Sendilykkjan er ferningur, 300 m á kant, og er ein hlið hennar samsíða ströndu. Ótruflaður sýndarviðnámsferill (óendanlega langt frá sjó) er sýndur með heildreginni línu. Gert er ráð fyrir 15 m djúpum sjó og að eðlisviðnámið í sjónum sé 0,1 Ω m. Mynd 8 sýnir reiknaða sýndarviðnámsferla (línur með táknum) fyrir mælingar mis langt frá ströndu (fjarlægð er mæld frá ströndu að þeirri hlið lykkjunnar sem næst er sjó). Á myndinni sést að sjórinn hefur mikil áhrif þegar mælingin er nærri ströndu. Áhrifin minnka þegar fjær dregur, en eru samt enn veruleg 450 m frá sjónum og koma greinilega fram innan mælisviðs þeirra tækja sem hér eru notuð.

Mynd 9 sýnir áhrif sjávar þegar mæling er gerð út á nesi. Viðnámslíkan jarðar er sama þriggja laga líkanið og áður (ótruflaður ferill er heildregin lína). Myndin sýnir ferla mælinga sem gerðar eru annars vegar 300 m frá beinni ströndu (ferill b) og hins vegar á nesi þar sem eru 300 m til sjávar á þrjá vegu (ferill a). Eins og við var að búast hefur sjórinn verulega meiri áhrif þegar mælt er á nesinu.

Af þessu virðist mega álykta sem svo að mælingar megi ekki vera nær ströndu en 800-1000 m til þess að áhrif sjávar komi ekki fram. Augljóst er af mynd 8, að ef einvíðri túlkun er beitt á mælingar nærri sjó, koma fram lög með mun lægra viðnámi en raunverulega eru til staðar og að þau koma fram á minna dýpi og með lægra viðnámi, eftir því sem mælingin er nær sjó. Það voru einmitt þessi einkenni sem sáust í mæligögnum og vöktu grunsemdir um að áhrif sjávar væru meiri en haldið var. Þetta þarf þó ekki að þýða að TEM-mælingum megi ekki beita nærri sjó, heldur hitt að við slíkar aðstæður er einvíð túlkun ófullnægjandi og beita þarf þrívíðri túlkun.

4. FREKARI ÞRÓUN

Þótt forritið sé orðið nothæft er eftir töluverð vinna við það. Ef til vill má gera enn betur í því að minnka minnisnotkun og reiknitíma þó ekki sé líklegt að það verði gert svo um muni. Eftir er að gera notendaviðmót forritsins betra. Töluverð vinna fer í að setja upp líkön og fella heppilegt hnitanet að þeim. Skrifa þarf hugbúnað sem gerir þá vinnu fljótlegru og auðveldari. Síðast, en ekki síst, þarf að prufukeyra forritið betur, til þess að kanna kerfisbundið hversu stór hnitanet þarf að nota og hvernig best er að dreifa hnitpunktum til að fá hámarks reikninákvæmni með sem minnstu neti. Þetta er mikilvægt því að minnisþörf og reiknitími aukast mjög ört með stækkandi neti. Einnig þarf að prófa kerfisbundið hversu marga grunnvektora þarf að nota í spectur þáttuninni því að reiknitíminn vex hraðar en í beinu hlutfalli við fjölda þeirra. Ennfremur þarf að gera ýtarlegri samanburð á niðurstöðum TEMDDD og annarra þrívíðra forrita, einkum fyrir líkön þar sem viðnámsbreytingar eru miklar. Kanna þarf betur og fá skorið úr, eftir því sem unt er, hvernig stendur á þeim mun sem er á niðurstöðum TEMDDD og IE-forritana sem fram kemur á myndum 6 og 7 hér að framan. Þetta er nauðsynlegt því að viðnámsbreytingar í háhitasvæðum héraendis geta verið mjög miklar og vissa þarf að vera fyrir því að forritið ráði við þær.

Eins og áður hefur komið fram þá er hægt að reikna raunhæf líkön á um hálfri klukkustund og hugsanlega er hægt að gera enn betur í því að minnka reiknitímann. Það fer því að vera raunhæfur möguleiki að gera þrívítt "inversion"-forrit byggt á TEMDDD. Það yrði gert með því að fella þrívíða forritið inn í almennan kóða sem framkvæmir "least-squares inversion" þar sem viðnámsgildi í ákveðnum hlutum hnitanetsins yrðu ákvörðuð með ítrekunum, þannig að reiknaður ferill falli sem best að mældum. TEMDDD yrði notað til að reikna svörun líkana og hlutafleiður með tilliti til viðnámsgilda. Fyrir hvert ítrekunarskref þarf að reikna svörun líkansins og hlutafleiður með tilliti til þeirra viðnámsgilda sem fá að breytast. Um þriðjungur reiknitímans í TEMDDD fer í að reikna randskilyrðin á yfirborði og ef viðnámsgildum í yfirborði er ekki leyft að breytast þarf einungis að framkvæma þá reikninga einu sinni þannig að reiknitíminn minnkar niður í um 20 mínútur. Þetta þýðir, að fyrir líkön með 5 frjálsum viðnámsgildum, mun hvert ítrekunarskref taka um eina klukkustund. Reikna má með að 5 til 10 ítrekunarskref þurfi til að nálgja mælda ferilin eins vel og hægt er og mun það taka um 5 til 10 tíma. Þetta er ekki lengri tími en svo að vel er gerlegt að beita þrívíðri "inversion" með því að láta tölvurnar vinna nótt og dag.

Hér að framan hefur einkum verið fjallað um notkun þrívíða forritsins við úrvinnslu á þeirri tegund TEM-mælinga sem mest hefur verið notuð hérlendis til þessa, þar sem mæld er tímaafleiða lóðréttis þáttar segulsviðsins (span í spólu) í miðju sendilykkju. Þessi mæliuppsetning hefur verið sérstaklega vinsæl vegna þess að hún lágmarkar þrívíð áhrif í mæliferlunum, en það er mjög mikilvægt þegar einungis er beitt einvíðri túlkun. Með tilkomu hugbúnaðar til að reikna svörun þrívíðrar viðnámskipanar opnast heilt svið möguleika á að beita öðrum mæliuppsetningum. Ef viðnámskipanin er á annað borð þrívíð liggur beint við að nota mæliuppsetningar sem gefa sterka svörun við þrívíðum áfrifum til að fá sem mestar upplýsingar um viðnámsdreifinguna. Með TEMDDD má reikna hvernig líkleg viðnámskipan svarar og velja mæliuppsetningu samkvæmt því. Með því að mæla ekki einungis tímaafleiðu lóðréttis þáttar segulsviðsins í miðju sendilykkju heldur tímaafleiðu allra þriggja þátta segulsviðsins innan í og umhverfis sendilykkjuna, eða umhverfis jarðtengdan tvíþól, má fá miklar upplýsingar um viðnámsdreifinguna. Með þrívíðri "inversion" má síðan túlka allar mælingar sem gerðar eru með sömu uppsprettu í einu.

Hér er sérstaklega hafður í huga möguleiki á að beita TEM-aðferðum við leit á lóðréttum vatnsleiðurum á lágheitsvæðum hérlendis. Þeir hafa hingað til verið kannaðir með viðnámsniðsmælingum. Þær eru frekar bæði á tíma og mannafla og þar með mjög dýrar. Það er því eftir miklu að slægjast ef hægt verður að lækka kostnað við slíka jarðhitaleit og gera kleyft að nota viðnámsmælingar í meira mæli en hægt hefur verið hingað til vegna kostnaðar. Ástæða er til að ætla að með TEM-aðferðum meigi ákvarða legu og stefnu lóðréttra vatnsleiðara með mun minni fyrirhöfn og kostnaði en með viðnámsniðsmælingum.

5. HEIMILDIR:

Druskin, V.L. og Knizhnerman, L.A., 1988: Spectral differential-difference method for numeric solution of three-dimensional nonstationary problems of electric prospecting. *Izvestiya, Earth Physics*, Vol. 24, No. 8, 641-648.

Hohmann, G.W., 1988: Numerical modeling for electromagnetic methods of geophysics; í bók ristýrt af Nabighian, M.N: *Electromagnetic methods in applied geophysics; Investigations in geophysics 3*, Vol. 1, Soc. Expl. Geophys.

Newman, G.A., Hohmann, G.W. og Anderson, W.L., 1986: Transient electromagnetic response of a three-dimensional body in a layered earth. *Geophysics*, Vol. 51, 2117-2130.

Newman, G.A., Anderson, W.L. og Hohmann, G.W. , 1987: Interpretation of transient electromagnetic soundings over three-dimensional structures for the central-loop configuration. *Geophys. J.R. astr. Soc.*, 89, 889-914.

Newman, G.A og Hohmann, G.W. , 1988: Transient electromagnetic responses of high-contrast prisms in a layered earth. *Geophysics*, Vol. 53, 691-706.

Wang, T. og Hohmann, G.W., 1993: A finite-difference, time-domain solution for three-dimensional electromagnetic modeling. *Geophysics*, Vol. 58, 797-809.

ENGLISH SUMMARY

A computer program for three-dimensional (3D) model calculations for TEM-soundings has been developed. The program solves Maxwell's equations describing the electromagnetic field for conducting earth and isolating air above. The continuous partial differential equations are turned into vector differential equations in time by finite difference approximation of the space variables. An approximate solution to the vector equations is obtained by analytic solution of a reduced equation system in a subspace of the original vector space, by Lanczos spectral decomposition.

The program is written in Ansi C and demands large computer memory and high computational speed. For realistic models, 30 to 60 Mb of memory is needed and the computation time is in the range of 0.5 to 3 hours on DEC-Alpha3000/600 work station.

Results from the 3D program are compared to results from other programs. Apparent resistivity curves for layered half space compare well with curves calculated with 1D programs. Calculated responses for 3D resistivity structures are compared with results from other 3D programs. The results do generally agree but with some exceptions. For the cases where the results do not agree, arguments are put forward, indicating that the described program is more accurate, but further testing is needed to confirm this.

As an example of application of the program, the effect of the conducting sea is calculated for TEM-soundings close to the coast. This effect is substantial, even at considerable distance from the sea