

TILRAUN

TIL AÐ ÁÆTLA RENNSLI MJÓLKÁR
YFIR VETRARMÁNUÐINA ÚT FRÁ
VEÐURFARSPÁTTUM

eftir

JAKOB BJÖRNSSON

og

GUNNAR ÁMUNDASON

Reykjavík, janúar 1964

TILRAUN

TIL AÐ ÁÆTLA RENNSLI MJÓLKÁR YFIR VETRARMÁNUÐINA ÚT FRÁ VEÐURFARSPÁTTUM

eftir

JAKOB BJÖRNSSON

og

GUNNAR ÁMUNDASON

Reykjavík, janúar 1964

E F N I S Y F I R L I T

1. Inngangur	bls. 1
2. Niðurstöður samanburðar á rennsli Mjólkár og veðurfarspáttum	" 2
3. Áætlað rennsli Mjólkár mánuðina okt. - júní fyrir tímabilið 1928 - 1959 (32 ár)	" 3
3.1 Líklegasta rennsli hvers mánaðar og staðalskekkja hins áætlaða gildis	" 3
3.2 Reiknaðar rennslisskýrslur Mjólkár fyrir mánuðina júní - okt. 1928 - 1959, fengnar með því að bæta handahófsþætti (random component) við líklegasta rennslið	" 4
4. Samanburður við eldri mælingar í Mjólká	" 5

T Ö F L U R :

Tafla 1: Líklegasta mánaðarvatn Mjólkár
mánuðina okt. - júní 1928 - 1959

Tafla 2: Reiknaðar rennslisskýrslur fyrir Mjólká
mánuðina okt. - júní 1928 - 1959

M Y N D I R :

1. mynd: Vatnasvið Mjólkár og næstu veðurathugunarstöðvar
2. mynd: Samband mánaðarvatns Mjólkár og gráðudaga yfir
+2, 5° C í Kvíngindisdal mánuðina okt. - júní 1959 - 1963
3. mynd: Dreifing frávikanna í mánaðarvatni einstakra mánaða
frá línunni $X_1 = 2,8 + 0,05 \cdot X_2$
4. mynd: Dreifing handahófsbreytunnar t
5. mynd: Reiknað mánaðarvatn Mjólkár okt. - júní 1928 - 1959
6. mynd: Samband reiknaðs mánaðarvatns í Mjólká og gráðudaga
yfir +2, 5° C í Kvíngindisdal mánuðina okt. - júní 1928 - 1959

FYLGISKJAL

Nánari greinargerð varðandi hina statistisku útreikninga og niðurstöður þeirra.

1. Regressionsjöfnur þær, sem í fyrstu voru reyndar Bls. F-1
2. Niðurstöður, sem fengust af fyrstu regressionsjöfnum .. " F-3
3. Statistisk prófun á niðurstöðum " F-4
4. Endanlega valin regressionsjafna fyrir tímabilið okt.-júní " F-7
5. Tilraun til að finna samband rennslis og gráðudaga fyrir mánuðina júlí - sept. " F-8
6. Staðalfrávik áætlaðs rennslis skv. jöfnu (4) " F-9
7. Aðferð til að bæta handahófslið við útreiknað mánaðarvatn skv. regressionsjöfnunni " F-11
8. Samanburður á niðurstöðum útreikninga og eldri mælinga " F-12

1. Inngangur

Skýrslur um rennsli fallvatna eru sem kunnugt er oft miklu skammærri en æskilegt þykir eða nauðsynlegt vegna undirbúnings vatnsaflsstöðva eða annarra vatnsvirkja. Reynt er með ýmsum hætti að bæta úr þessu og auka við þær skýrslur, sem fyrir eru, með því að áætla rennslið lengra aftur í tímann á einn eða annan hátt. Hinar skammæju skýrslur frá einum stað eru stundum bornar saman við skýrslur frá öðrum stað, sem ná yfir lengri tíma, fyrir það tímabil, sem sameiginlegt er báðum og sá samanburður síðan látinn gilda aftur fyrir sig allan þann tíma, sem lengri skýrslurnar ná yfir. Önnur algeng aðferð er að bera rennslið saman við ýmsa veðurfarsþætti, svo sem úrkomu, hitastig o.fl. eins og þeir mælast á vatnasviði viðkomandi fallvatns, eða í nágrenni þess. Kostur þessarar aðferðar er sá, að veðurathuganir ná víða miklu lengra aftur í tímann en mælingar á rennsli vatna. Aðferðin byggist í þessu tilviki raunar á því sama og í hinu fyrra, þ. e. að samanburður fyrir stutt tímabil er látinn gilda óbreyttur fyrir annað lengra.

Mjólká í Arnarfirði er eitt mikilvægasta fallvatnið á Vestfjörðum frá virkjunarsjónarmiði. Því miður eru ekki til í Mjólká óslitnar vatna-mælingar, nema frá því árið 1959. Raunar hófust mælingar í Mjólká árið 1947, en þær féllu niður 1951, þegar bóndinn á Borg í Arnarfirði, sem annaðist álestra, hætti búskap og flutti burt og byggð lagðist af í botni fjarðarins.

Til þess að freista þess að ráða að nokkru bót á þessum skorti á rennslisupplýsingum fyrir Mjólká var gerð athugun á sambandi rennslisins í Mjólká á tímabilinu frá 1959 og ýmsum veðurfarsþáttum, eins og þeir hafa verið athuganir á nálægum veðurathuganastöðvum, en þær næstu eru Kvígindisdalur við sunnanverðan Patreksfjörð og Þórustaðir í Önundarfirði (sjá 1. mynd). Segja má að þessi athugun hafi gefið mjög góðan árangur, eftir atvikum. Hér á eftir er gerð grein fyrir niðurstöðum hennar, en athuguninni sjálfri er nánar lýst á fylgiskjali með þessari skýrslu.

2. Niðurstöður samanburðar á rennsli Mjólkár og veðurfarsþáttum

Niðurstöður framangreindra athugana má draga saman þannig:

- (1) Fyrir mánuðina okt. -júní, þ.e. þann tíma ársins, þegar gera má ráð fyrir að verulegur hluti úrkomunnar á vatnasvið Mjólkár falli sem snjór eða að mikil snjóleysing eigi sér stað þar (maí og júní), gildir eftirfarandi regressionsjafna:

$$X_1 = 2,8 + 0,05 X_2 \quad (I)$$

þar sem

X_1 er mánaðarvatn Mjólkár, í Gl.

X_2 er gráðudagar yfir + 2,5 °C á veðurathugunarstöðinni í Kvígindisdal, í sama mánuði.

Samband þetta er að sjálfsögðu statistískt; einstakir mánuðir víkja talsvert frá þessu línulega sambandi, eins og 2. mynd sýnir. Samt verður statistískt séð að telja að með þessu hafi fengizt allnáið samband milli mánaðarvatnsins í Mjólká og gráðudaga í Kvígindisdal. Samsvörunarstuðullinn (korrelationskoefficient) er um 0,9 (1,0 hæsta mögulegt gildi), og sambandið er statistískt marktækt (signifikant) með yfir 99,9% líkindum.

Ástæðan til þess að gráðudagarnir í Kvígindisdal eru taldir yfir 2,5 °C er sú, að það svarar nokkurn veginn til gráðudaga yfir 0 °C í 500 m hæð, en sú hæð er nálægt því að vera meðalhæð vatnasviðs Mjólkár.

- (2) Fyrir aðra mánuði ársins, þ.e. júlí, ágúst og september, tókst ekki að finna statistískt marktækt samband milli rennslis Mjólkár og veðurfarsþátta. Það samband, sem fannst, var ekki marktækt með 90% líkindum, sem er fremur lágt í þessum efnum, og því var ekki gert neitt með það. Má því segja, að nothæft samband milli rennslis Mjólkár og veðurfarsþátta hafi einungis fengizt fyrir mánuðina okt. -júní.
- (3) Tilraun til að miða útreikning á fjölda gráðudaga (X_2 í jöfnu (I)) við meðaltal hitans í Kvígindisdal og á Þórustöðum, í stað þess að miða við hitann í Kvígindisdal eingöngu, gaf ekki niðurstöður er væru frábrugðnar þeim, sem jafna (I) sýnir, svo að marktækt

væri. Var því sú einfaldari leið farin að miða við hitann í Kvígindisdal eingöngu.

- (4) Athuganir voru gerðar á sambandinu milli rennslis Mjólkár (X_1) og ýmissa fleiri veðurfarsþátta en gráðudaganna (X_2), svo sem úrkomu á dögum með pösítífan hita í 500 m hæð (X_3); margfeldi úrkomu og pösítífs hita í 500 m hæð (X_4) og úrkomu alls í viðkomandi mánuði (X_5). Niðurstöður þessara athugana voru þær, að sambandið við aðra veðurfarsþætti en gráðudaga (þ.e. við X_3 , X_4 og X_5) væri ekki statistískt marktækt og fengist því jafngóður árangur með því að nota gráðudagana einvörðungu.

Í meðfylgjandi fylgiskjali er gerð nokkru nánari grein fyrir hinum statistísku útreikningum og niðurstöðum þeirra í einstökum atriðum.

3. Áætlað rennsli Mjólkár mánuðina okt.-júní fyrir tímabilið 1928-1959 (32 ár)

3.1 Líklegasta rennsli hvers mánaðar og staðalskekkja hins áætlaða gildis

Út frá jöfnu (I) og upplýsingum um hitann í Kvígindisdal, sem látnar voru í té af veðurfarsdeild Veðurstofu Íslands var reiknað mánaðarvatn Mjólkár í hverjum um sig af mánuðunum okt.-júní frá því að veðurathuganir hófust í Kvígindisdal og fram til 1959, að áreiðanlegar samfelldar rennslismælingar hófust í Mjólká. Niðurstöðurnar eru sýndar á töflu 1. Staðalfrávik hins áætlaða eða útreiknaða gildis mánaðarvatnsins reyndist 1,24 Gl. Staðalfrávikkið gefur til kynna, hversu langt frá hinu líklegasta, reiknaða, gildi mánaðarvatnið getur víkið með tilteknum líkindum. Þannig eru um 32% líkindi á því, að mánaðarvatnið víki um meira en eitt staðalfrávik frá líklegasta gildi; um 5% líkindi til að það víki um meira en tvö og 0,3% líkindi til að það víki um meira en 3 staðalfrávik frá líklegasta gildi.

Sjálfst staðalfrávikkið, s, er sett saman úr nokkrum liðum, eins og nánar er gert grein fyrir á meðfylgjandi fylgiskjali. Á 2. mynd eru dregin mörk þau, er ákveðast af einföldu staðalfrávikki frá regressionslínunni, skv. jöfnu (I).

3.2 Reiknaðar rennslisskýrslur Mjólkár fyrir mánuðina júní-okt. 1928-1959, fengnar með því að bæta handahófspætti (random component) við líklegasta rennslið

Tölurnar í töflu 1 sýna fyrir hvern mánuð um sig líklegasta mánaðarvatn Mjólkár þann mánuð, og staðalfrávikið gefur til kynna, hversu langt frá þessu líklegasta gildi mánaðarvatnið kann að liggja, með tilteknum líkindum. En það væri þó með miklum ólíkindum, að margir mánuðir í röð væru allir með "líklegasta rennsli". Ef litið er á 2. mynd sést, að rennsli einstakra mánaða sýna óreglubundin frávik frá regressionslínunni, en hún sýnir "líklegasta" rennslið, eins og það verður ráðið af gráðudögunum sömu mánuði. Tölurnar í töflu 1, sem einmitt eru reiknaðar eftir regressionsjöfnunni (I), hafa því þann galla, að þær sýna rennslið óeðlilega "útjafnað"; í þær vantar þá "náttúrulega óreglu", sem lýsir sér í fráviki einstakra punkta á 2. mynd frá línunni. Það sýnir sig að þessi frávik í rennsli einstakra mánaða frá regressionslínunni dreifast nokkurn veginn "normalt", þ.e. eftir Gausskúrfu, eins og 3. mynd sýnir, en þar eru frávikin sett upp á svonefndum "líkindapappír", þar sem normaldreifð stærð kemur fram sem bein lína.

Með hliðsjón af þessu var reynt að bæta úr áður nefndum ágalla við hinar útreiknuðu tölur með því að bæta við þær þætti, er valinn væri af handahófi, og með því líkt eftir hinni eðlilegu óreglu rennslisins, og rennslisskýrslur þannig reiknaðar fyrir Mjólka mánuðina okt. -júní 1928-1959 eftir formlunni:

$$X_{1R} = 2,8 + 0,05 X_2 + t \cdot s \quad (\text{II})$$

Hér þýðir

X_{1R} mánaðarvatn Mjólkár í Gl., þegar handahófspátturinn t er meðreiknaður.

X_2 gráðudaga yfir + 2,5° C í Kvígingisdal, sama mánuð.

s staðalfrávikið = 1,24 Gl.

t tölu, sem valin er af handahófi úr talnasafni, sem er normaldreift með meðaltalið 0 og staðalfrávikið 1,0.

Í framkvæmdinni voru tölurnar t fengnar út frá töflum yfir svonefndar handahófstölur (random numbers) og töflum yfir Gausskúrfuna, eins og nánar er gerð grein fyrir í meðfylgjandi fylgiskjali. Á 4. mynd eru útdregin gildi á t sett upp í línurit á líkindapappír, og sést að þau

fylgja mjög vel beinni línu.

Niðurstöður þessara reikninga eru sýndar í töflu 2, sem er eins konar tilbúin rennslisskýrsla fyrir Mjólka mánuðina okt.-júní á tímabilinu 1928-1959. Tölurnar neðan við þverstrikið í töflunni, þ.e. fyrir tímabilið eftir 1959, sýna hins vegar niðurstöður mælinga. 5. mynd sýnir sömu niðurstöður í línuritsformi. Loks sýnir 6. mynd sambandið milli rennslis og gráðudaga, þegar handahófsliðnum hefur verið bætt við (jafna II). Myndin sýnir greinilega, hvernig einstakir punktar dreifast um regressionslínuna á svipaðan hátt og á 2. mynd, sem sýnir samband þetta það tímabil, sem mælingar ná yfir.

4. Samanburður við eldri mælingar í Mjólka

Sem fyrr segir voru gerðar vatnamælingar í Mjólka á árunum 1947-1951. Samtals hefur verið mælt 36 mánuði innan tímabilsins okt.-júlí á þessum árum.

Þessar eldri mælingar voru bornar saman við útreiknuðu gildin fyrir sömu mánuði, en útreikningarnir eru algerlega byggðir á síðari mælingunum, sem fyrr segir. Niðurstaðan af þessum samanburði, sem nánar er gert grein fyrir í fylgiskjalinu, var sú, að mældu gildin væru að meðaltali um 25% hærri en þau reiknuðu. Sökum óvissunnar í útreikningunum (sem lýsir sér í stærð staðalfráviksins $s = 1,24 \text{ Gl/mán}$), og þess, að hér er aðeins um meðaltal 36 mánaða að ræða, þarf þessi munur ekki að vera annað en tilviljun, þótt líkindin á að svo sé ekki séu raunar milli 95 og 99% (munurinn er statistískt marktækur með 95% en ekki með 99% líkindum). Miklar líkur eru sem sé á, að útreikningarnir sýni lægri niðurstöðu þetta tímabil en eldri mælingarnar. Sá munur gæti stafað af (1) að eldri mælingarnar sýndu yfirleitt of háar niðurstöður; eða (2) þær síðari sem reikningarnir eru byggðir á of lágar, eða (3) hvort tveggja eða (4) að sambandið milli rennslis og gráðudaga hafi verið svo miklu öðruvísi á fyrra mælingatímabilinu en á hinu síðara, að munurinn sé statistískt marktækur. Ekki verður þó séð nein skynsamleg ástæða fyrir slíkum mun, og verður hitt að teljast líklegra, að um raunverulegan mun í mæliniðurstöðum á mælingatímabilunum tveim sé að ræða. Marktækið er hins vegar svo lélegt, að varla er ástæða til að gera mikið með þennan mun.

T A F L A I

Líklegasta mánaðarvatn Mjólkár, mánuðina okt. - júní árin 1928 - 1959; Gl.

Staðalfrávik mánaðarvatnsins er $S = 1,24$ Gl.

Ár	Janúar	Febr.	Marz	Apríl	Maí	Júní	Júlí	Agúst	Sept.	Okt.	Nóv.	Des.
1928	2.9	3.8	3.8	5.5	11.4	12.5				7.9	4.3	3.9
29	4.9	4.1	7.3	5.7	8.2	12.1				3.5	3.6	3.6
30	2.8	4.0	3.0	5.1	9.5	11.6				4.9	3.0	3.2
31	2.9	2.9	3.4	4.2	8.4	12.1				5.8	3.8	4.0
32	3.1	6.4	4.8	2.9	10.6	12.8				4.9	4.6	3.9
33	3.6	2.8	3.8	4.3	11.7	13.8				4.6	5.6	6.0
34	3.2	3.4	2.8	3.6	6.0	12.7				5.2	3.7	4.3
35	4.9	3.0	4.3	4.4	10.3	12.1				4.3	4.1	3.2
36	2.9	3.5	2.9	5.1	9.5	10.5				7.8	3.7	3.0
37	3.3	2.8	3.3	4.7	8.0	11.8				6.0	4.7	4.0
38	3.2	4.5	2.9	5.0	7.0	10.4				5.5	3.3	4.0
39	3.2	3.0	4.2	4.7	10.8	13.9				9.6	4.8	3.3
40	4.2	4.1	3.0	4.5	8.6	12.4				6.9	3.2	3.9
41	4.3	3.4	4.3	6.4	9.8	13.8				8.7	6.4	3.7
42	3.3	4.5	4.5	6.2	9.8	11.3				3.8	5.6	3.5
43	3.3	2.8	4.1	3.9	7.3	12.4				4.8	4.5	4.6
44	2.9	3.5	3.8	3.7	7.0	12.2				5.5	3.4	3.2
45	3.0	2.9	4.7	5.4	9.1	12.8				8.4	7.2	3.2
46	4.5	3.4	3.8	3.5	10.0	10.1				10.7	5.1	4.6
47	5.0	2.9	2.8	3.2	10.4	13.7				7.6	3.6	4.3
48	3.2	3.7	5.1	3.8	5.3	12.9				5.3	4.6	3.6
49	2.9	3.3	3.0	2.8	4.1	12.8				6.4	4.4	3.0
50	3.7	3.1	3.3	3.0	8.1	10.9				5.2	4.0	3.0
51	2.8	3.1	2.8	3.5	8.5	11.5				6.4	3.5	3.1
52	2.9	3.0	3.7	4.7	7.1	9.1				7.1	4.7	4.3
53	3.2	3.6	4.0	3.3	8.5	13.7				5.5	3.9	4.0
54	3.8	3.3	4.0	5.6	10.1	11.6				4.8	4.3	3.0
55	3.4	2.8	3.4	6.2		12.7				4.6	5.6	2.9
56	3.1	4.2	4.8	4.4	8.1	9.8				6.1	6.1	3.9
57	3.4	2.8	3.6	5.3	8.0	12.3				5.7	5.3	3.3
58	3.0	2.9	4.0	4.0	5.5	11.9				8.0	5.5	3.6
59	3.0	3.7	5.0	3.6	8.4	10.8						

1. mynd

Fig. 1

RAFORKUMÁLASTJÓRI
Orkudeild

VATNASVIÐ MJÓLKÁR OG NÆSTU
VEÐURATHUGANASTÖÐVAR.

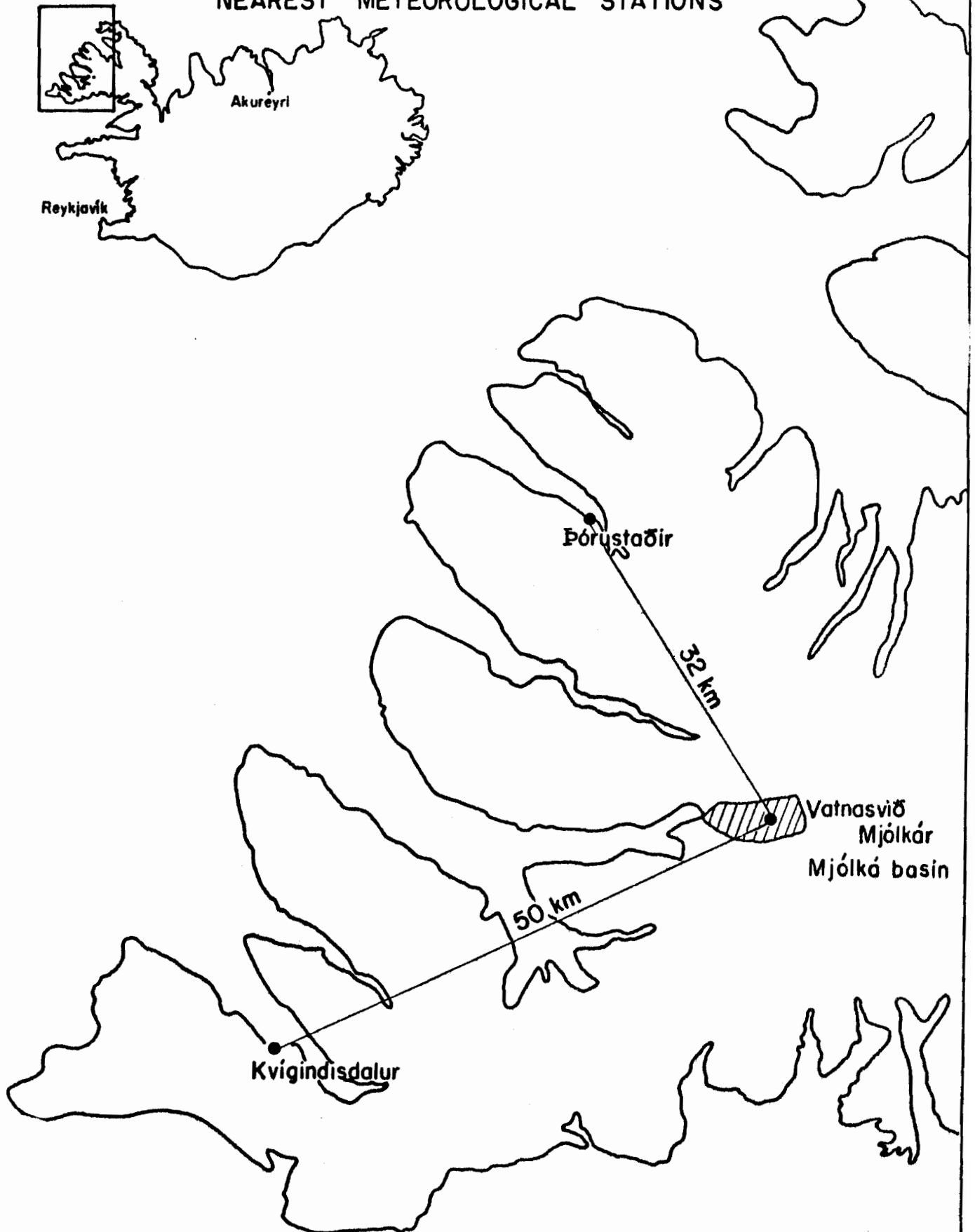
6.1.63 JB/SJ.

B - 76

Tnr. 98

Fnr. 6509

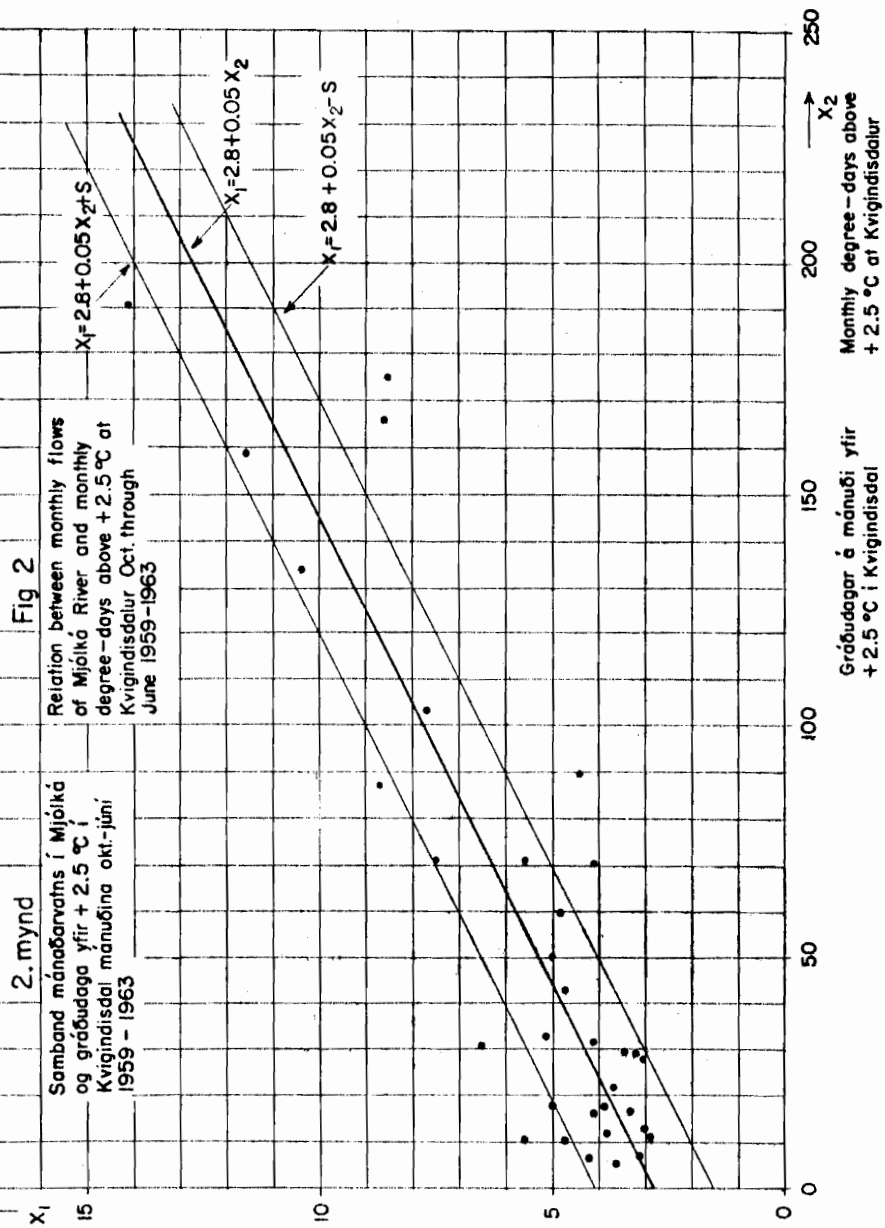
LOCATION OF MJÓLKÁ BASIN AND THE
NEAREST METEOROLOGICAL STATIONS

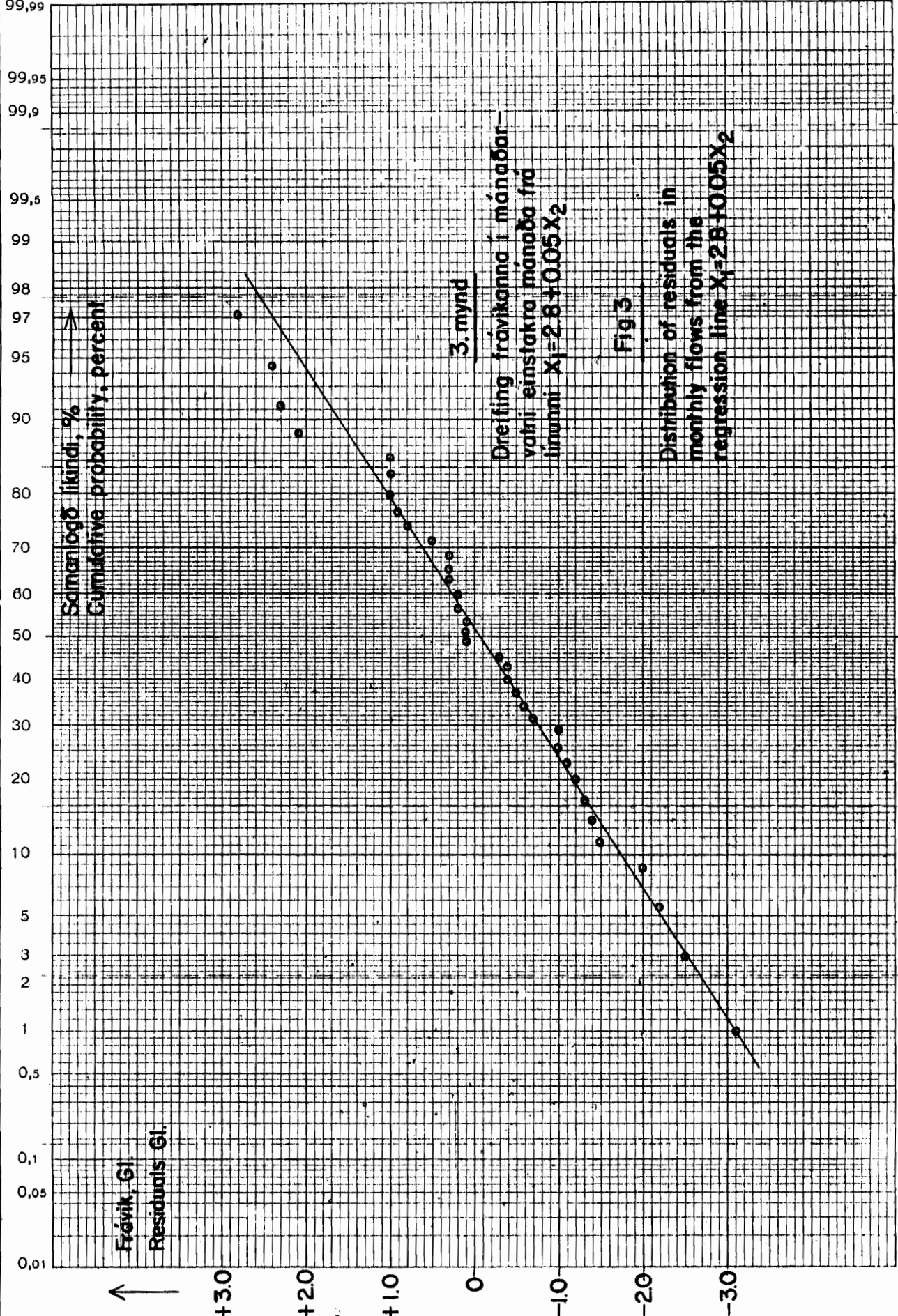


0 10 20 30 40 50 km

1:500 000

Mánaðarvatn
Mjólkár Gl.
Monthly Flow
of Mjólká R
A Gl.





$\Phi(\bar{x} + 3\sigma)$

$\Phi(\bar{x} + 2\sigma)$

$\Phi(\bar{x} + \sigma)$

$\Phi(\bar{x} - \sigma)$

$\Phi(\bar{x} - 2\sigma)$

$\Phi(\bar{x} - 3\sigma)$

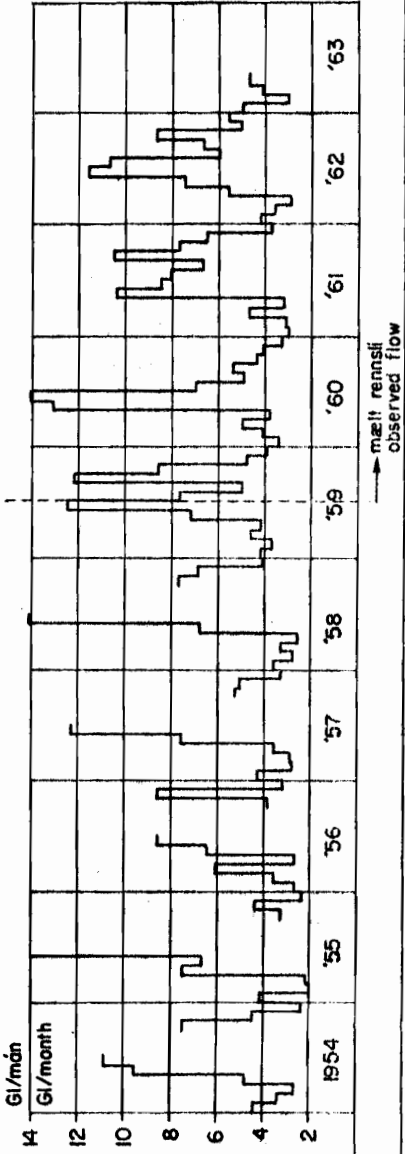
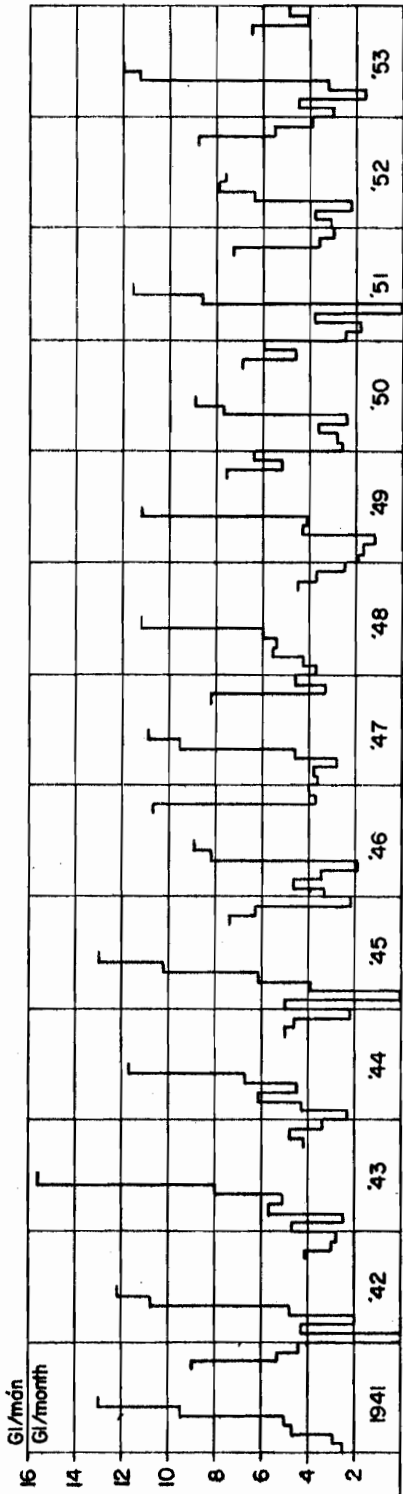
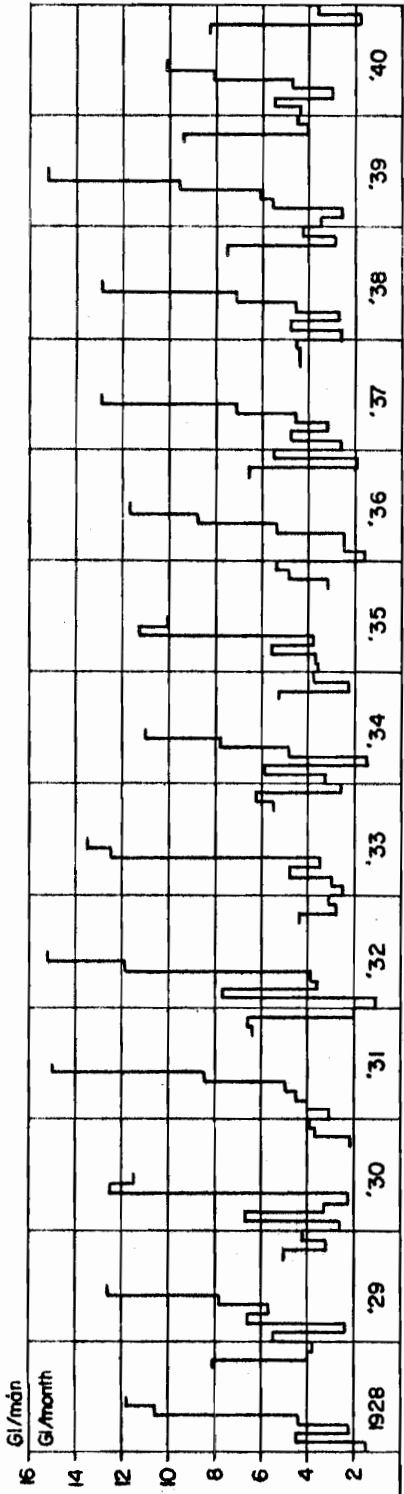


Fig 5
Synthesized hydrograph
of monthly flows of
Mjólka River Oct through
June 1928 - 1959

5. mynd
Reiknað mánaðarvatn Mjólkar
okt - júní 1928 - 1959

GI/mán.

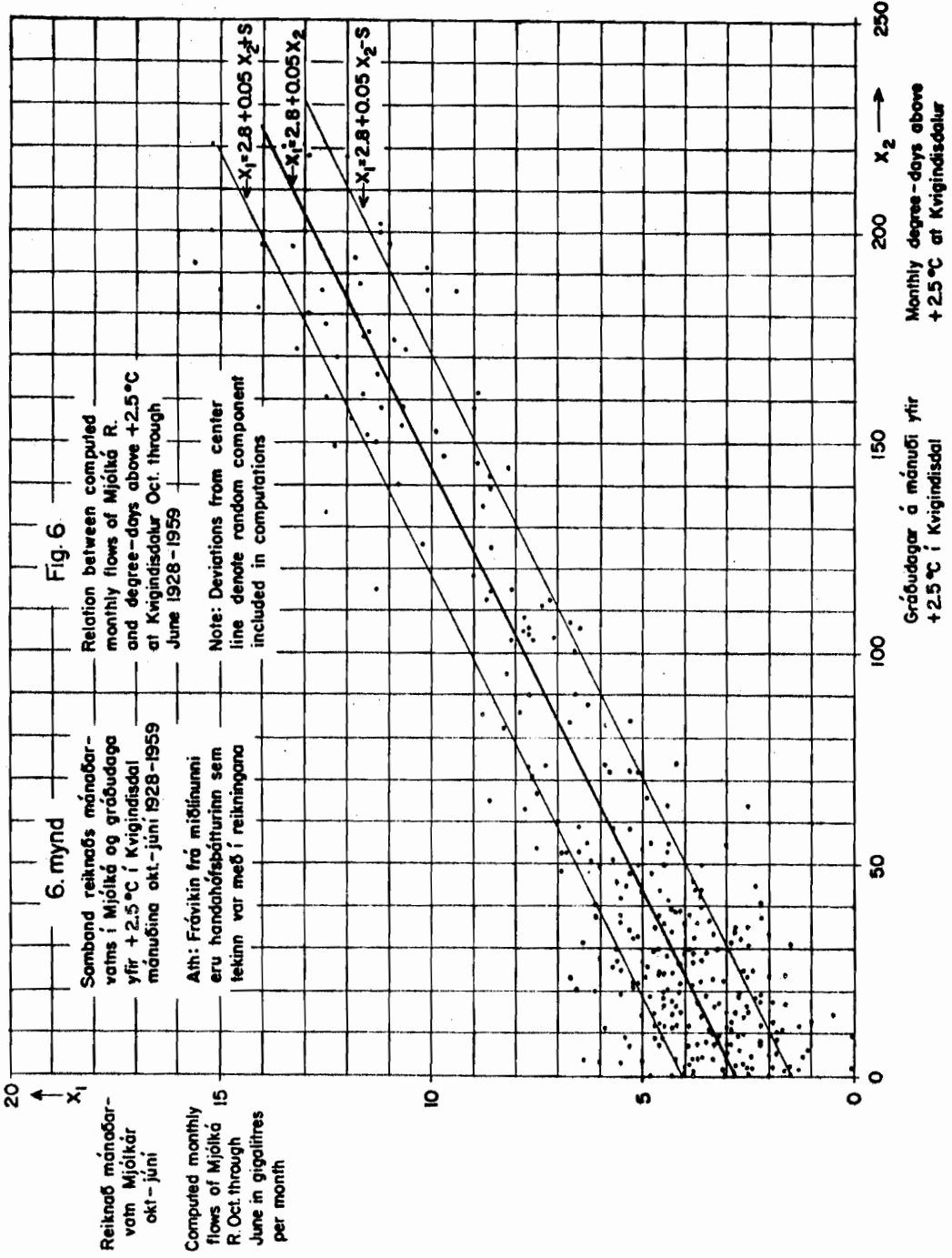


Fig. 6

Relation between computed monthly flows of Mjólká R. and degree-days above +2.5°C at Kvígrindisdalur Oct. through June 1928-1959

6. mynd

Samband reiknaðs mánaðarvæms í Mjólká og gráðudaga yfir +2.5°C í Kvígrindisdal mánuðina okt.-júni 1928-1959

Note: Deviations from center line denote random component included in computations

Ath: Frávikin frá miðlinummi eru handahófsbátturinn sem tekinn var með í reikningana

Reiknað mánaðarvæm Mjólkár okt.-júni
Computed monthly flows of Mjólká R. Oct. through June in gigalitres per month

Monthly degree-days above +2.5°C at Kvígrindisdalur

Gráðudagar á mánuði yfir +2.5°C í Kvígrindisdal

FYLGISKJAL

NANARI GREINARGERÐ VARDANDI HINA STATISTISKU ÚTREIKNINGA OG NIÐURSTÖÐUR ÞEIRRA

1. Regressionsjöfnur þær, sem í fyrstu voru reyndar

Þar eð tilgangurinn með athuguninni á sambandinu milli rennslis Mjólkár og veðurfarsþátta var fyrst og fremst sá að ganga úr skugga um, hvort fært væri að áætla rennslið út frá veðurfarsþáttum, eins og þeir hafa mælt á nálægum veðurathuganastöðvum, þá voru þegar í upphafi teknir með allir þeir veðurfarsþættir, sem hugsanlegt var talið að haft gætu veruleg áhrif á rennslið. Ennfremur var strax í upphafi gert ráð fyrir, að áhrif veðursins á rennslið væri með öðrum hætti þann hluta ársins, þegar mestur hluti úrkomunnar á vatnasvið Mjólkár fellur sem snjór, eða um talsverða snjóleysingu þar er að ræða, heldur en hinn hlutann, þegar gera má ráð fyrir, að úrkoman sé að mestu regn og leysing er fremur lítil. Út frá þessu sjónarmiði var árinu skipt í tvö tímabil og sín regressionsjafnan reynd fyrir hvort þeirra um sig.

Tímabilin eru

- 1) Mánuðirnir október-júní, að báðum meðtöldum. Lengst af á þessum tíma má gera ráð fyrir, að úrkoma falli á vatnasvið Mjólkár sem snjór, að mestu leyti a.m.k., og jafnframt, að snjóleysing geti á þessu tímabili haft veruleg áhrif á rennslið.
- 2) Mánuðirnir júlí-september, að báðum meðtöldum. Þennan tíma ætti mestur hluti úrkomunnar á vatnasviðið að falla sem regn. Ennfremur má ætla, að leysing vetrarsnævarins sé að jafnaði langt komin í júnílok og að leysing hafi ekki veruleg áhrif á rennslið þessa þrjá mánuði.

Regressionsjöfnurnar, sem reyndar voru í upphafi, voru þessar:

Fyrir tímabil 1 (okt. -júní) :

$$X_1 = a + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4 \quad (1)$$

þar sem

X_1 er mánaðarvatn Mjólkár, í Gl, tiltekinn mánuð á tímabilinu.

X_2 er fjöldi gráðudaga yfir 0°C í 500 metra hæð yfir sjó (sem er nálægt meðalhæð vatnasviðs Mjólkár) sama mánuð. Stærð

Þessi var reiknuð eftir meðalhita dagsins á veðurathugana-
stöðvunum í Kvígindisdal, við sunnanverðan Patreksfjörð, og
Þórustöðum í Önundarfirði, á þann hátt, að fundinn var meðal-
hiti þessara tveggja staða hvern dag mánaðarins, dregið þar
frá $2,5^{\circ}\text{C}$ ($0,5^{\circ}\text{C}$ fyrir hverja 100 m yfir sjó, upp í 500 m)
og þannig fenginn meðalhiti dagsins í 500 m hæð, sem ætlazt
var til, að gilti nokkurn veginn á vatnasviði Mjólkár, sem
liggur á milli veðurathuganastöðvanna tveggja; að lokum voru
svo hitastigin lögð saman þá daga mánaðarins, sem þau voru
yfir 0°C .

X_3 er samanlögð úrkoma í mm þá daga mánaðarins, þegar hitinn
í 500 m hæð, reiknaður eins og að framan greinir, var yfir
 0°C . Úrkoman er tekin sem meðaltal dagsúrkomunnar í Kvíg-
indisdal og á Þórustöðum.

X_4 er samanlagt margfeldi úrkomu og hita í 500 m hæð þá daga
mánaðarins, sem hitinn þar var yfir 0°C . Hiti og úrkoma
voru reiknuð eins og að framan greinir.

a ; b_2 ; b_3 og b_4 eru festlur (konstantar).

Fyrir tímabil 2 (júlí-sept.):

$$X_1 = a + b_2 X_2 \quad (2)$$

þar sem

X_1 er mánaðarvatn Mjólkár, í Gl, tiltekinn mánuð á tímabilinu.

X_2 er heildarúrkoma sama mánaðar, í mm, reiknuð sem meðaltal
úrkomunnar í Kvígindisdal og á Þórustöðum.

a ; b_2 eru festlur.

Til grundvallar útreikningunum lágu niðurstöður rennslismælinga
í Mjólká frá því í júlí 1959 til og með apríl 1963, fengnar frá
vatnamælingum raforkumálastjóra. Fengust því alls 34 mánuðir
af tímabili 1 og 12 mánuðir af tímabili 2. Upplýsingar um veður-
farsþættina í Kvígindisdal og á Þórustöðum þessa sömu mánuði
voru fengnar frá veðurfarsdeild veðurstofunnar.

2. Niðurstöður, sem fengust af fyrstu regressionsjöfnunum

2.1 Festlur jafnanna

Akvörðun á festlunum a ; b_2 ; b_3 og b_4 í jöfnum (1) og (2) hér að framan fór fram með venjulegum aðferðum (aðferð hinna minnstu kvaðrata). Niðurstöðurnar urðu:

Jafna (1) (Tímabilið okt.-júní):

$$X_1 = 2,5 + 45,34 \cdot 10^{-3} \cdot X_2 + 11,36 \cdot 10^{-3} \cdot X_3 - 4,09 \cdot 10^{-4} \cdot X_4$$

Jafna (2) (Tímabilið júlí-sept.):

$$X_1 = 6,0 + 2,01 \cdot 10^{-2} \cdot X_2$$

2.2 Staðalfrávik

Staðalfrávikin frá regressionsjöfnunum urðu sem hér segir:

Frá jöfnu (1)

$$s_{1.234} = 1,17 \text{ Gl}$$

Frá jöfnu (2)

$$s_{1.2} = 2,23 \text{ Gl}$$

2.3 Regressionsstuðlar

Jafna (1) (okt.-júní)

Heildar-regressionsstuðull $R_{1.234}$:

$$R_{1.234}^2 = 0,874; R_{1.234} = 0,93$$

Þessi niðurstaða segir, að skýra megi 87,4% af breytileikanum (variance) í mánaðarvatninu (X_1) með breytileika stærðanna X_2 , X_3 og X_4 á sama tíma. Fullkomið línulegt samband, þannig að stærðin X_1 væri engu háð nema X_2 , X_3 og X_4 myndi gefa

$R_{1.234}^2 = 1,00$. Hér er því um hátt hlutfall að ræða.

Hluta-regressionsstuðlar :

$$R_{1.2}^2 = 0,757 ; \quad R_{1.2} = 0,87$$

$$R_{1.3}^2 = 0,093 ; \quad R_{1.3} = 0,16$$

$$R_{1.4}^2 = 0,024 ; \quad R_{1.4} = 0,31$$

$$\text{Samtals} \quad 0,874$$

Summan af kvaðrötum þessara þriggja hluta-regressionsstuðla er jöfn kvaðrati heildar-regressionsstuðulsins. Nánar tiltekið er þýðing hluta-regressionsstuðlanna, eða öllu heldur kvaðrata þeirra, sem hér segir :

$R_{1.2}^2 = 0,757$ segir í rauninni, að 75,7% breytileikans í ársvatninu (X_1) verði skýrð með breytileikanum í X_2 einum saman. Að bæta við nýrri frumstærð, X_3 , skýrir 9,3% til viðbótar og X_4 enn 2,4%. Samtals skýra þessar þrjár frumstærðir, X_2 , X_3 og X_4 því 87,4% breytileikans í X_1 , en einmitt þetta er merking heildar-regressionsstuðulsins.

Af þessu má strax ráða, að af stærðunum X_2 ; X_3 og X_4 sé sú fyrsta mikilvægust, því hún ein skýrir nærri 76% breytileikans í X_1 , en hinar tvær, X_3 og X_4 skýra samanlagt aðeins 11,4% til viðbótar.

Jafna (2) (júlí-september)

Hér er aðeins um eina óháða breytu (breytistærð) að ræða, X_2 , og því aðeins um einn regressionsstuðul, r . Niðurstaðan varð

$$r^2 = 0,26 ; \quad r = 0,51$$

Þessi niðurstaða segir, að einungis 26% breytileikans í X_1 mánuðina júlí-september verði skýrð með breytileika X_2 (heildarúrkomu í mánuði) á sama tíma. Jafna (2) skýrir því miklu lægri hluta af breytileik rennslisins á tímabilinu júlí-sept. en jafna (1) gerir fyrir tímabilið okt.-júlí.

3. Statistisk prófun á niðurstöðum

Prófun á einstökum liðum í jöfnum (1) og (2) var gerð með því

að rannsaka, hvort stuðlarnir b_2 , b_3 og b_4 við X_2 , X_3 og X_4 væru frábrugðnir 0, svo að statistískt marktækt væri.

Niðurstöðurnar urðu :

Jafna (1)

Fyrst var reiknað staðalfrávik stuðlanna b_2 , b_3 og b_4 . Fyrir þau fengust þessi gildi

$$s_{b2} = 4,62 \cdot 10^{-3}$$

$$s_{b3} = 0,084$$

$$s_{b4} = 1,51 \cdot 10^{-3}$$

Úr þessu fæst svo

$$t_2 = \frac{|b_2|}{s_{b2}} = \frac{45,34 \cdot 10^{-3}}{4,62 \cdot 10^{-3}} = 9,814$$

$$t_3 = \frac{|b_3|}{s_{b3}} = \frac{11,36 \cdot 10^{-3}}{8,4 \cdot 10^{-2}} = 0,135$$

$$t_4 = \frac{|b_4|}{s_{b4}} = \frac{4,09 \cdot 10^{-4}}{1,51 \cdot 10^{-3}} = 0,2709$$

Fjöldi athugana (þ.e. mánaða á tímabilinu okt. - júlí) er $N = 34$.

Í jöfnu (1) eru fjórar festlur (konstantar) og fjöldi frelsisstiga (degrees of freedom) er því $n = 34 - 4 = 30$.

Fyrir 30 frelsisstig fæst úr töflum yfir t-dreifinguna :

Líkindi á tilviljun	P = 0,05	t = 2,042
" " "	P = 0,01	t = 2,750
" " "	P = 0,001	t = 3,646

Með samanburði á þessum töflugildum við útreiknuðu gildin t_2 , t_3 og t_4 sést, að stuðullinn við X_2 er statistískt marktækur með langt yfir 99,9% líkindum (þ.e. líkindin til að fá svona háan stuðul af tilviljun einni saman eru minni en 0,1%, og raunar langtum minni, eins og sést með því að bera $t_2 = 9,814$ saman við $t_{0,001} = 3,646$). Sambandið við X_2 er því mjög marktækt.

Stuðlarnir við X_3 og X_4 ná því hvorugir að vera marktækir með 95% líkindum og vantar mikið á, (þ.e. líkindin á svo háum gildum á stuðlum þessum af hreinni tilviljun eru langt yfir 5%, eins og greinilega sést á t-gildum þeirra).

Heildarniðurstaðan varðandi jöfnu (1) er því sú, að einungis sambandið við X_2 , gráðudaga yfir 0°C í 500 m hæð, er statistískt marktækt, og raunar marktækt með mjög hárrí líkindatölu; langt yfir 99,9%, en sambandið við bæði X_3 og X_4 þar á móti greinilega ómarktækt.

Jafna (2)

Staðalfrávik stuðulsins b_2 í þessari töflu reyndist

$$s_{b_2} = 1,05 \cdot 10^{-2}$$

og

$$t_2 = \frac{2,01 \cdot 10^{-2}}{1,05 \cdot 10^{-2}} = 1,91$$

Fjöldi athugana, þ.e. fjöldi mánaða á tímabilinu júlí-sept., er $N = 12$. Fjöldi festla í jöfnu (2) er 2 og frelsisstigin eru því $n = 12 - 2 = 10$. Fyrir 10 frelsisstig gefa töflur yfir t-dreifingu:

Líkindi á tilviljun	$P = 0,05$	$t = 2,228$
" " "	$P = 0,01$	$t = 3,169$
" " "	$P = 0,001$	$t = 4,587$

Hið útreiknaða t er því lægra en búast má við af tilviljun með 5% líkindum; þ.e. sambandið við X_2 er ekki statistískt marktækt með 95% líkindum.

Jafna (2) dæmist því úr leik.

Útkoma hinna statistisku prófana á jöfnum (1) og (2), sem reyndar voru í upphafi, er því þessi:

- (1) Í jöfnu (1) er aðeins sambandið við X_2 , fjölda gráðudaga, statistískt marktækt.
- (2) Jafna (2) er ekki statistískt marktækt.

4. Endanlega valin regressionsjafna fyrir tímabilið okt. -júní

Með tilliti til niðurstaðanna af statistisku prófununum, sem lýst var hér að framan, var ákveðið að nota eingöngu gráðudagana sem óháða breyту til að bera rennslið saman við.

Í fyrstu voru gráðudagarnir miðaðir við meðaltal hitans á Þórustöðum og í Kvígindisdal. Regressionsjafnan varð þá

$$X_1 = 2,9 + 0,048 \cdot X_2 \quad (3)$$

þar sem X_1 er mánaðarvatn Mjólkár í Gl og X_2 gráðudagar yfir 0°C í 500 m hæð, reiknaðir eftir meðaltali hitans í Kvígindisdal og á Þórustöðum.

Regressionsstuðullinn varð

$$r^2 = 0,802; \quad r = 0,9$$

Prófun á stuðlinum við X_2 , gerð á þann hátt sem að framan er lýst með útreikningi á t , gaf

$$t = 11,1$$

Fjöldi athugana er hér $N = 34$, eins og áður, en festlurnar í jöfnunni eru aðeins 2, þannig að frelsisstigin verða $n = 34 - 2 = 32$, og fæst þá úr töflum fyrir t

Líkindi á tilviljun	$P = 0,05$	$t = 2,037$
" " "	$P = 0,01$	$t = 2,740$
" " "	$P = 0,001$	$t = 3,614$

Sést af þessu, að jafna (3) er marktæk með langt yfir 99,9% líkindum.

Þar eð ætlunin var að nota jöfnu þessa til að áætla rennsli Mjólkár eins langt aftur í tímann og veðurathuganir leyfðu, var augljóst að nokkur vinnusparnaður myndi vera að því, ef hægt væri að miða gráðudagana við Kvígindisdal einvörðungu í stað þess að reikna með Þórustöðum líka. Hér kom það líka til, að veðurskýrslur frá Þórustöðum ná tiltölulega skammt aftur í tímann. Raunar var athugað áður á Flateyri, en stöðin síðan flutt að Þórustöðum. Slíkur flutningur athugunarstöðvar myndi e.t.v. hafa einhver en óþekkt

áhrif á niðurstöðurnar, og var því talið æskilegt að miða við eina veðurstöð eingöngu, þar sem langar veðurskýrslur eru fyrir hendi. Þessu skilyrði fullnægir Kvígindisdalur mætavel, þar eð veðurskýrslur þar eru til frá því árið 1927.

Með tilliti til þessa var jafna (3) umreiknuð þannig, að miðað var við hitann í Kvígindisdal einvörðungu við útreikninga á gráðudögum. Hin endanlega regressionsjafna, sem allir frekari reikningar eru byggðir á, varð þá þessi

$$X_1 = 2,8 + 0,05 \cdot X_2 \quad (4)$$

Regressionsstuðullinn varð fyrir þessa jöfnu

$$r^2 = 0,81; \quad r = 0,9$$

Jafna (4) skýrir þannig svo að segja nákvæmlega jafnstóran hluta breytileikans í X_1 , eins og jafna (3) gerði. Prófun á stuðlinum við X_2 gaf

$$t = 13,45$$

borið saman við 11,1 á grundvelli jöfnu (3). Sambandið er þannig statistiskt marktækt með langt yfir 99,9% líkindum, eins og áður. Jafna (4) verður þannig að teljast að öllu leyti jafngóð og jafna (3), og þar eð vinnusparnaður er að notkun hennar, varð hún fyrir valinu, eins og fyrr segir.

5. Tilraun til að finna samband rennslis og gráðudaga fyrir mánuðina júlí-sept.

Sem fyrr segir reyndist samband það milli heildarúrkomu og rennslis, sem fyrst var reynt fyrir þetta tímabil (jafna 2) ekki statistiskt marktækt og það skýrði aðeins 26% breytileikans í X_1 . Þótt raunar væri það ekki líklegt var því ekki talið með öllu útilokað, að eitthvað skárra samband fengist milli gráðudaga og rennslis á þessu tímabili. Úr þeim athugunum fékkst jafnan

$$X_1 = 4,6 + 0,015 \cdot X_2 \quad (5)$$

og fyrir hana reyndist regressionsstuðullinn

$$r^2 = 0,174; \quad r = 0,42$$

Þessi jafna (5) skýrir þannig enn lægri hluta af breytileika rennslisins mánuðina júlí-sept. en jafna (2) gerði, eða 17,4% í stað 26%. Prófun á marktæki (signífíkans) stuðulsins við X_2 gaf

$$t = 1,45$$

Fjöldi athugana er $N = 12$; festlur jöfnunnar (5) eru tvær og frelsisstig því $n = 12 - 2 = 10$, sem gefa, skv. t-töflum

Líkindi á tilviljun	$P = 0,1$	$t = 1,8$
" " "	$P = 0,05$	$t = 2,037$
" " "	$P = 0,01$	$t = 2,740$

Sambandið er þannig ekki statistískt marktækt með 90% líkindum einu sinni.

Með tilliti til þessa var algjörlega hætt við tilraunir til að finna samband rennslis og veðurfarsþátta fyrir tímabilið júlí-október.

6. Staðalfrávik áætlaðs rennslis skv. jöfnu (4)

Jafna (4) gefur aðferð til að reikna mánaðarvatn Mjólkár, þegar fjöldi gráðudaga yfir $+ 2,5^\circ\text{C}$ í Kvígindisdal hinn sama mánuð er þekktur. Sökum þess að hér er um statistískt samband að ræða en ekki funktionelt, má búast við vissum skekkjum eða vissri óvissu í þessum útreikningum. Sem mælikvarða á þessa óvissu er heppilegast að nota staðalfrávik hins áætlaða rennslis, s .

Þetta staðalfrávik, eða öllu heldur kvaðrat þess, s^2 , er samsett

úr tveimur meginliðum s_1 og s_2 , þannig að $s^2 = s_1^2 + s_2^2$.

Fyrri liðurinn, s_1 , á rót sína í því, að rennslispunktarnir falla ekki allir á regressionslínuna, heldur dreifast óreglulega kringum hana, eins og 2. mynd sýnir greinilega. Síðari liðurinn, s_2 , orsakast af óvissunni í legu sjálfrar regressionslínunnar. Festlurnar í jöfnu (4) eru reiknaðar út frá mældum rennslistölum og gráðudagatölum samtals 34 mánaða. Þessi 34 talnapör eru hins vegar aðeins sýnishorn af samhenginu milli rennslis og gráðudaga, tekið yfir lengra tímabil. Hefðu einhverjir aðrir 34 mánuðir verið lagðir til grundvallar, hefðu að öllum líkindum fengist önnur gildi á festlunum í jöfnu (4).

Sú jafna er af forminu

$$X_1 = a + bX_2 = M_{x1} + b(X_2 - M_{x2})$$

þar sem M_{x1} er meðaltalið af X_1 og M_{x2} meðaltalið af X_2 .

Báðar festlurnar, M_{x1} og b (eða a og b) eru óvissu undirorpnar, sem tákna má með staðalfrávikum hvorrar um sig, s_M og s_b .

Þessi staðalfrávik má reikna, þegar stærð sýnishornsins og breytileikinn innan þess eru þekkt.

Staðalfrávikði í legu regressionslínunnar ákveðst þá af

$$s_2^2 = s_M^2 + s_b^2 (X_2 - M_{x2})^2$$

Heildar-staðalfrávik einstakra gilda á áætluðu rennsli skv. jöfnu (4) verður þá:

$$s^2 = s_1^2 + s_2^2 = s_1^2 + s_M^2 + s_b^2 (X_2 - M_{x2})^2$$

Þessa jöfnu má umskrifa þannig:

$$s^2 = C_1 + C_2 \cdot X_2^2 + C_3 X_2$$

þar sem C_1 , C_2 og C_3 eru festlur (konstantar), eða eftir að talnagildin á festlunum hafa verið reiknuð út

$$s = \sqrt{1,52 + 1,35 \cdot 10^{-5} \cdot X_2^2 - 157,42 \cdot 10^{-5} \cdot X_2} \quad (6)$$

Staðalfrávikði er þannig háð X_2 á fremur flókinn hátt.

Það er minnst fyrir $X_2 = 58,3$, meðaltal gráðudaganna á mánuði fyrir þá 34 mánuði, sem lagðir voru til grundvallar útreikningunum. Fyrir það gildi á X_2 gefur jafna (6) $s = 1,21$. Innan við 1/10 af mánuðum á tímabilinu okt. - júní á árunum 1928-1959 eða síðan at- hugarir hófust í Kvígingisdal, hafa fleiri en 175 gráðudaga á mánuði, en fyrir $X_2 = 175$ fæst $s = 1,29$, og allra hæsta gildið, sem fyrir kemur á X_2 er 221,4, sem svarar til $s = 1,35$. Af þessu sést, að breytingin með X_2 er afar hægfara. Þar eð jafna (6) er tímafrek í notkun og langsamlega flestir (eða yfir 90%) mánuðir hafa færri gráðudaga en 175, var farin sú leið að nota $s = 1,24$ sem meðaltal fyrir öll gildi á X_2 . Skekkjan í s , sem af þessu leiðir, er hverfandi, nema fyrir örfáa, óvenjulega heita mánuði, þar sem hún nálgast 10%.

7. Aðferð til að bæta handahófslið við útreiknað mánaðarvatn skv. regressionslínunni

Af ástæðum, sem nánar er gerð grein fyrir í meginmáli þessarar greinargerðar, þótti ástæða til að reyna að líkja eftir hinni náttúrulegu óreglu í rennslinu, með því að bæta handahófslið (random component) við þá tölu, sem fékkst út úr regressionsjöfnunni. Tilgangurinn er sem sé að líkja eftir frávíkunum frá regressionslínunni, sbr. 2. mynd. Eins og 3. mynd sýnir, lætur mjög nærri, að frávik þessi dreifist normalt, og skv. því ætti handahófsliðurinn einnig að hafa þá dreifingu. Jafnframt má telja eðlilegt, að frávikin frá línunni standi í beinu hlutfalli við staðalfrávikið s .

Þetta tvennt bendir strax til jöfnu af forminu

$$X_{1R} = 2,8 + 0,05 X_2 + t \cdot s \quad (7)$$

þar sem

X_{1R} er mánaðarvatn í Mjólká, eftir að handahófsliðurinn hefur verið reiknaður með.

X_2 er, eins og áður, gráðudagar yfir $+2,5^\circ\text{C}$ í Kvígingisdal, viðkomandi mánuð.

t er valin af handahófi úr talnasafni, sem er normaldreift með meðaltalinu 0 og staðalfráviki 1.

s er staðalfrávik hins áætlaða rennslis, skv. jöfnu (6).

Í jöfnu (7) hafa allar stærðir þegar verið reiknaðar, nema t . Handahófsvalið á t gæti t.d. farið fram með þeim hætti, að talnasafn með þessum eiginleikum væri útbúið á bréfmíðum, þeim blandað vel saman og síðan dreginn einn og einn miði, eins og í happdrætti. Handhægari aðferð, og sú sem notuð var í þessu tilvik, er að finna t sem lausn á jöfnunni

$$\int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot dx = R_n \quad (8)$$

þar sem R_n er handahófsbreyta (random variate), þ.e. tala valin af algeru handahófi. Slíkt val var framkvæmt með því að fletta upp í töflum um svonefndar handahófstölur (random numbers), velja þar R_n og fara með inn í töflu yfir integral Gausskúrfunnar og finna t . Á 4. mynd er sýnd dreifing valinna gilda á t ; fullkom-

lega normal dreifing kemur fram sem bein lína á slíku línuriti.

8. Samanburður á niðurstöðum útreikninga og eldri mælinga

Á árunum 1947-1951 voru gerðar reglubundnar rennslismælingar í Mjólká, sem féllu niður 1951, þegar byggð lagðist af í botni Arnarfjarðar. Þessar fyrri mælingar voru ekki notaðar við ákvörðun regressionslínunnar. Því er fróðlegt að bera niðurstöður þeirra saman við það, sem útreikningarnir gefa.

Á þessum árum var mælt í samtals 36 mánuði á tímabilinu okt. - júní. Sökum handahófspáttarins í útreiknaða rennslinu er þess ekki að vænta, að mælingar og reikningur sýni sömu gildi fyrir einstaka mánuði út af fyrir sig. Hins vegar ætti meðaltal hinna 36 mánaða að vera svipað samkvæmt reikningum og mælingum.

Samanburðurinn var gerður með þeim hætti, að reiknuð voru frávik mældra gilda frá regressionslínunni, skv. jöfnu (4) og þessi frávik borin saman við handahófspætti þá, sem notaðir höfðu verið í reikningunum á sama tímabili. Niðurstöðurnar urðu sem hér segir :

	<u>Frávik mældra gilda</u>	<u>Handahófspættir (frávik reiknaðra gilda)</u>
Meðaltal, Gl/mán	1,19	0,08
Breytileiki (variance)	5,84	2,27

Prófun á hlutfalli breytileikanna (svonefnd F-prófun) gefur

$$F = \frac{5,84}{2,27} = 2,57$$

Úr töflum yfir F-dreifinguna fæst

Líkindi á tilviljun	P = 0,05;	F = 1,72
" " "	P = 0,01;	F = 2,17

Hlutfall breytileikanna er því frábrugðið 1 með yfir 99,9% líkindum.

Því næst er gerð prófun á mismun meðaltalanna. Er fyrst reikn-

aður eins konar meðal-breytileiki S_1 , ákveðinn af formlunni

$$S^2 = \frac{1}{N_1 + N_2 - 2} \cdot \left[\sum (ts - M_{ts})^2 + \sum (Z - M_Z)^2 \right]$$

þar sem

$$N_1 = N_2 = 36$$

ts er handahófsþátturinn

$$M_{ts} \text{ meðaltal handahófsþáttarins fyrir þessa 36 mánuði} \\ = -0,08$$

Z = frávik mældra gilda frá regressionslínunni

$$M = \text{meðaltal þessara frávika} = 1,19$$

Ofangreind formla gefur $s = 2,01$.

Að lokum er t-prófinu beitt á mismun meðaltalanna, þannig

$$t = \frac{1,19 - (-0,08)}{2,01} \cdot \sqrt{\frac{36 \cdot 36}{36 + 36}} = 2,67$$

Tölur yfir t gefa

Líkindi á tilviljun	P = 0,05	2,03
" " "	P = 0,01	2,72

Mismunur meðaltalanna er því marktækur með 95% líkindum, en nær hins vegar ekki 99% marktæki.

